

I.U.F.M.

CAZALA Carine

Académie de Montpellier

Site de Perpignan

**Comment amener les élèves à structurer et à élaborer la
recherche d'un problème ?**

Discipline : Mathématiques

Classe : Seconde

Lycée Jules Fil, Carcassonne

Tuteur : Philippe ALAVERDOV

Assesseur : Yves GIRMENS

Année universitaire : 2001-2002

SOMMAIRE

INTRODUCTION	p. 4
PROBLEMATIQUE.....	p. 5
1- Constat.....	p. 5
2- Pourquoi ces élèves ont-ils copiés les uns sur les autres ?.....	p. 6
2-1- Du point de vue des élèves	
a- Pourquoi est-ce qu'un élève copie ?	p. 6
b- Pourquoi y a-t-il blocage ?	p. 6
2-2- Du point de vue du professeur	
a- A quoi sert un devoir à la maison ?	p. 6
b- Quels types d'exercices le composent ?	
Quelles sont ses différences avec un devoir en classe ?	p. 7
c- Pourquoi ce copiage est-il si gênant pour moi,	
tandis que pour eux cela leur paraît habituel et naturel ?	p. 7
3- Problématique.....	p. 8
PRESENTATION.....	p. 9
1- 1 ^{er} blocage : au début de la recherche.....	p. 9
1-1- Problème : « je n'ai rien compris » ou « je n'y arrive pas »	p. 9
1-2- Objectif : arriver à les faire débiter un problème	p. 10
2- 2 ^{ème} blocage : au milieu de la recherche.....	p. 12
2-1- Problème : « je ne sais pas comment utiliser cette méthode »	p. 12
2-2- Objectif : arriver à leur faire appliquer une technique, une méthode ...	p. 12
3- 3 ^{ème} blocage : à la fin de l'exercice.....	p. 12
3-1- Problème : solution incompréhensible pour une tierce personne	p. 12
3-2- Objectif : arriver à faire rendre intelligible la solution de l'élève	p. 13
4 - Conclusion.....	p. 13
STRATEGIE.....	p. 14
1- Styles d'exercices.....	p. 14
1-1- Introduction	p. 14
1-2- Problèmes ouverts	p. 14
1-3- Narrations de recherche	p. 15
2- Thèmes exploités.....	p. 16

PREMIERE EXPERIENCE.....	p. 17
1- Présentation.....	p. 17
2- Dispositif.....	p. 17
3- Premiers réactions des élèves.....	p. 17
4- Analyse des copies d'élèves.....	p. 18
4 -1- 1 ^{er} brouillon	
a- Compte rendu des réponses	p. 18
b- Premier constat	p. 18
c- Exploitation	
c-1- Courbes comportant les courbes dessinées sans explication	p. 19
c-2- Copies blanches	p. 20
c-3- Copies comportant une analyse du problème	p. 21
c-4 - Copies comportant les courbes dessinées avec des explications	p. 22
d- Synthèse	p. 23
4 -2-2 nd brouillon	
a- Choix des brouillons des élèves	p. 24
b- Compte-rendu des réponses	p. 24
c- Premier constat	p. 24
d- Exploitation	p. 26
e- Synthèse	p. 26
5- Conclusion de l'expérience.....	p. 27
 SECONDE EXPERIENCE.....	 p. 28
1- Présentation.....	p. 28
2- Dispositif.....	p. 28
3- Premières réactions des élèves.....	p. 29
4- Analyse des copies d'élèves.....	p. 29
4 -1- 1 ^{ère} étape	
a- Présentation des équations du test	p. 29
b- Récapitulatif des résultats observés	p. 30
c- Commentaire	p. 30
d- Synthèse	p. 30
4 -2- 2 ^{ème} étape	
a- Choix des équations	p. 31
b- Observations des narrations de recherche	p. 31
c- Exploitation	p. 31
d- Synthèse	p. 32
4 -3- 3 ^{ème} étape	
a- Préparation	p. 33
b- Elaboration de la "grille d'étude"	p. 33
c- Test de cette "grille d'étude"	p. 34
d- Synthèse	p. 34
5- Conclusion de l'expérience.....	p. 34
 CONCLUSION.....	 p. 35
BIBLIOGRAPHIE.....	p. 36
ANNEXES.....	p. 37

INTRODUCTION

Septembre 2001, j'endosse une nouvelle "casquette".
Terminée la vie insouciante d'étudiante, à présent je suis un professeur. J'ai des vraies responsabilités : enseigner des mathématiques à des élèves.

Dès le premier contact avec ma classe, composée majoritairement de filles (30 pour 4 garçons), j'ai envie du meilleur pour eux et je souhaite qu'ils apprécient autant la matière que moi.
Très vite, je déçante et je me rends compte que le public qui est assis face à moi est plutôt majoritairement hermétique à la matière. Il n'a pas l'habitude de passer des heures à chercher la solution d'un problème.

Que faire ? Me décourager ? NON.

Je vais redoubler mes efforts pour éveiller en eux un désir d'apprendre, une curiosité pour la matière et surtout, pour les amener à savoir mener la recherche d'un problème.

PROBLEMATIQUE

1- Constat :

Lors de la correction d'un devoir à la maison, je me suis retrouvée confrontée à trente exercices identiques, similaires en tout point : même raisonnement, même rédaction et même présentation (passages à la ligne aux même endroits).

2- Pourquoi ces élèves ont-ils copiés les uns sur les autres ?

2-1- Du point de vue des élèves

a- Pourquoi est-ce qu'un élève copie ?

Plusieurs raisons peuvent être avancées :

- peut-être à cause de la note

J'ai décidé de la supprimer pour le devoir maison suivant, mais ils ne l'ont pas fait sérieusement. La note reste donc une motivation bien que celle-ci n'en soit pas une bonne.

- ils ne savent pas le faire

- ils ont peur de rendre une feuille quasiment blanche

- ils ne veulent pas le faire

Ce dernier paramètre sera éliminé pour la suite de ma réflexion.

En résumé, les élèves qui sont confrontés à une difficulté lors de la résolution d'un problème, ne trouve comme moyen d'y remédier, que de recopier la solution d'un autre élève.

b- Pourquoi y a-t-il blocage ?

La cause peut être l'énoncé de l'exercice. Notons que tous les élèves ne bloquent pas aux mêmes endroits. On peut alors mettre en évidence trois stades de blocages :

- au début de la recherche de l'exercice.

L'élève n'arrive pas à commencer l'exercice.

Il rend une feuille blanche. Il n'émet alors aucune idée de résolution, ne rédige même pas une solution éventuelle.

- au milieu de la recherche de l'exercice

L'élève a trouvé une idée de résolution mais il n'arrive pas à la mettre en œuvre.

Le résultat est le même que précédemment puisque, dans la majorité des cas, il rend une feuille blanche.

- à la fin de l'exercice

L'élève a trouvé la solution, a rédigé une réponse, mais la difficulté vient du fait que sa rédaction n'est pas intelligible par une tierce personne, dans un premier temps par son professeur.

2-2- Du point de vue du professeur

a- A quoi sert un devoir à la maison ?

Cette question aurait pu être ma problématique. Mais, j'aurais choisi la facilité en ne m'intéressant qu'à la surface du problème.

Les devoirs à la maison restent un travail écrit absolument essentiel à toute progression de l'élève¹. Il s'agit de devoirs faits pour que les élèves cherchent un problème et en rédigent une solution.

L'utilité d'un devoir à la maison étant avérée, intéressons-nous maintenant à son contenu.

b- Quels types d'exercices le composent ?

Quelles sont ses différences avec un devoir en classe ?

Un devoir en classe est une évaluation sur des compétences exigibles (avec souvent au moins un exercice supplémentaire "un peu nouveau", mais qui utilise des "techniques" vues dans la séquence), alors qu'un devoir à la maison comporte des exercices que l'on aborde en classe et qu'ils doivent approfondir seuls : ce sont des exercices dits de recherche (la solution n'est pas évidente et immédiate). On attend de la part de l'élève un effort de réflexion et de rédaction, on souhaite qu'il arrive à traduire par écrit sa pensée.

c- Pourquoi ce copiage est-il si gênant pour moi, tandis que pour eux cela leur paraît habituel et naturel ?

Quelles sont les raisons pour lesquelles je leur donne un devoir à la maison ? La principale est que je souhaite qu'ils fassent un effort de recherche. Lorsqu'ils copient, les élèves appliquent "la théorie du modèle" : on montre, ils le refont par calque.

Le seul point positif d'un copiage est qu'ils écrivent des mathématiques. Ils ont l'impression d'apprendre, de comprendre.

¹ Mathématiques Classe de Seconde Nouveau programme applicable à compter de l'année scolaire 2000-2001.
B.O. n°6 12 août 1999 hors-série.

Tout leur paraît très simple. Mais en les confrontant à nouveau à un exercice similaire, ils rencontreront les mêmes difficultés, les mêmes obstacles, et donc ne parviendront pas à trouver et à rédiger une réponse. Copier n'est pas suffisant pour apprendre parce que l'élève est beaucoup trop passif.

3- Problématique

Mon objectif est donc de leur faire construire leur savoir et de leur enseigner des compétences cognitives. Je veux qu'ils sachent rechercher.

En résumé, lors d'un copiage, le savoir n'est pas construit, les élèves sont passifs.

D'après les travaux de Piaget et le constructivisme :

« C'est en agissant que l'on apprend. »

« L'apprentissage ne se résume donc pas à une simple mémorisation, à une juxtaposition de savoir-faire ou à un conditionnement. »²

Il faut donc mettre l'élève devant l'obstacle afin de l'obliger à réfléchir et à le surmonter. Cette étape est nécessaire pour la construction et la consolidation de ses connaissances.

« Les connaissances passent d'un état d'équilibre à un autre par des phases transitoires au cours desquelles les connaissances antérieures sont mises en défaut. Si ce moment de déséquilibre est surmonté, c'est qu'il y a une réorganisation des connaissances, au cours de laquelle les nouveaux acquis sont intégrés au savoir ancien »²,

d'après les travaux de Piaget.

Dès lors on peut se demander :

Comment amener l'élève à élaborer et à structurer la recherche d'un problème ?

² Cf. Didactique des mathématiques de Michel Henry

PRESENTATION

Le mot clé de ma problématique est : **RECHERCHER**.

Comment faire pour que chaque élève arrive à franchir le ou les obstacles qui le bloquent lors de la résolution d'un problème ?

1- 1^{er} blocage : au début de la recherche de l'exercice

1-1- Problème : « je n'ai rien compris » ou « je n'y arrive pas »

Combien de fois j'entends une de ces phrases lorsque l'on commence la résolution d'un exercice !

Exemple : Résoudre $x^3 - 25x = 0$

Une élève m'appelle pour me signifier qu'elle est bloquée :

Elève : « Madame, je n'arrive pas à le faire. »

Professeur : « Bon, regardons la forme de l'équation.

Que remarques-tu ? »

E. : « x est facteur commun »

P. : « Et alors ? »

E. : « Je factorise par x, puis j'utilise $a^2 - b^2$, et j'ai les solutions. »

Dans ce cas, l'élève n'a besoin de son professeur que pour le rassurer.

Il faut donc arriver à leur faire dépasser cette barrière psychologique, leur faire surmonter cet obstacle.

Mais que se cache-t-il réellement derrière ces phrases ?

Les élèves les prononcent lorsqu'ils ont l'impression de n'avoir aucune idée, de "sécher" totalement sur le sujet. Ils passent alors d'un état actif à un état passif, état de découragement. Ils choisissent de se cacher derrière une de ces phrases plutôt que de remettre en cause leur recherche initiale, les premières pistes choisies pour débiter le problème.

Le plus souvent, ils sont partis sur une fausse piste et n'arrivent pas à relancer la recherche sur un autre chemin.

1-2- Objectif : arriver à les faire débiter un problème

Intéressons-nous d'abord à la signification du mot recherche.

« Effort de l'esprit pour trouver (une connaissance, une vérité). »

« Une recherche, des recherches : le travail, les travaux faits pour trouver des connaissances nouvelles, pour étudier une question. »³

La recherche entraîne donc l'utilisation de son esprit.

Il s'agit d'une étude pour répondre à une question. En mathématiques, on va utiliser des théorèmes, des propriétés, des définitions ... pour trouver la solution, la réponse.

Mais encore faut-il savoir comment déclencher un tel mécanisme pour arriver à un résultat.

Il est nécessaire d'émettre une idée. On peut alors démarrer une réflexion,

« un retour de la pensée sur elle-même en vue d'examiner plus à fond une idée, une situation, un problème. »³

Le plus difficile consiste à trouver cette idée.

La recherche d'un exercice commence donc par une phase d'analyse.

Cette phase se décompose en plusieurs étapes qui ne sont pas obligatoirement des écrits, on peut la faire de manière orale.

³ Cf. Petit Robert 1

- Prendre connaissance d'informations données : figure, énoncé.

Il faut s'approprier le texte, discerner les données qui pourront servir de base, de point de départ pour la résolution de l'exercice. Il est aussi nécessaire de comprendre le but du problème, c'est-à-dire arriver à expliciter, à traduire avec ses propres mots la ou les questions posées.

On doit donc être capable de reformuler par des phrases ou des dessins les informations que l'on vient de lire.

- Traduire les données en "langage mathématique".

Il faut utiliser nos connaissances, savoirs antérieurs afin d'exprimer mathématiquement les données du problème.

Donnons deux exemples de cette étape :

- La fonction f s'annule en 3 se traduit par 0 est l'image de f par 3.
- La perpendiculaire à la droite (d) passant par le point B coupe (d) en H se traduit par $(BH) \perp (d)$.

- Analyser les données du problème.

Il s'agit d'élaborer et d'organiser une démarche.

Il est possible de reconnaître des éléments d'une ou de plusieurs solutions déjà rencontrées, ou que le problème relève d'un modèle général connu. On identifie donc un modèle (formule, configuration, technique...) que l'on pourrait appliquer. On recherche l'outil adapté à la résolution du problème, on mobilise une connaissance.

2- 2^{ème} blocage : au milieu de la recherche de l'exercice

2-1- Problème : « je ne sais pas comment utiliser cette méthode »

L'élève a une idée, mais il n'arrive pas à la mettre en œuvre. Il ne sait pas comment s'y prendre, son esprit est confus.

2-2- Objectif : arriver à leur faire appliquer une technique, une méthode ...

Il s'agit d'une phase d'exécution.

Dans un premier temps, on doit choisir la méthode qui paraît la plus appropriée. Pour se faire, on contrôle que les conditions d'application de la formule, technique, théorème sont réunies. C'est à cet instant que l'on peut valider ou rejeter la méthode choisie.

Dans le cas où toutes les conditions seraient réunies et que l'on aboutit au résultat voulu, on met en œuvre la stratégie proposée en justifiant les différentes étapes. Sinon, on réitère le procédé avec une autre méthode. Il est possible que la première phase n'en ait fait ressortir qu'une seule, il faut alors recommencer l'analyse et s'intéresser plus particulièrement à des données que l'on a pu écarter ou oublier.

3- 3^{ème} blocage : à la fin de l'exercice

3-1- Problème : solution incompréhensible pour une tierce personne

L'élève a trouvé la solution, mais on ne comprend pas son cheminement. Il n'a pas su énoncer clairement sa pensée.

3-2- Objectif : arriver à faire rendre intelligible la solution de l'élève

Voici la dernière phase : une synthèse.

Il faut prendre du recul et avoir une vue globale sur l'ensemble des résultats.

A présent, il faut rayer toutes les fausses pistes, tous les résultats qui ne servent à rien et ne garder que ce qui sera utile pour la résolution et la rédaction de la solution.

On doit pouvoir communiquer, rendre intelligible aux autres sa propre démarche.

4 - Conclusion

Analyse, exécution et synthèse sont donc pour moi les trois phases qui s'imposent lors de la recherche d'un problème.

Je ne prétends pas donner une méthode qui doit être utilisée tel un calque pour la recherche de tout problème. Il est nécessaire de savoir l'adapter suivant le type d'exercices. Il est alors possible que des étapes soient inutiles, superflues.

Mon objectif n'est donc pas de faire acquérir une méthode telle une "recette de cuisine" pour rechercher la solution d'un problème. Je souhaite plutôt leur faire développer une nouvelle façon de penser, de réagir face à un exercice. Il faut qu'ils arrivent à prendre du recul et à ne plus foncer tête baissée dans la recherche d'une solution. Je souhaite aussi diminuer le nombre de phrases du style : « je n'ai rien compris », « je n'y arrive pas ».

J'aimerais donc qu'ils soient tous capables de me proposer une réponse à un problème donné. Peu m'importe que ce soit la bonne ou la mauvaise, mais au moins ils ne seront pas restés bloqués devant l'énoncé de l'exercice et ne rendront pas une feuille quasiment blanche.

STRATEGIE

Ensuite je dois établir une stratégie permettant d'amener mes élèves à mon objectif principal et final : savoir élaborer et structurer la recherche d'un problème.

1- Styles d'exercices

1-1-Introduction

Je dois faire une sélection judicieuse suivant le ou les critères que je veux tester. En effet, certains exercices sont beaucoup trop guidés et ne laissent aucune place à la recherche des élèves. La question principale est masquée par des questions intermédiaires qui accompagnent beaucoup trop l'élève dans sa démonstration. L'élève est comme un aveugle. Il ne comprend pas toujours pourquoi tel mécanisme est déployé pour démontrer la question. Il n'a pas toujours conscience de l'objectif premier de l'exercice et ne fournit pas un effort important de réflexion. Il suit la démarche proposée par l'énoncé sans se poser de questions et est satisfait de son travail lorsqu'il trouve un résultat intermédiaire demandé.

Ces démonstrations à un pas ne facilitent pas son émancipation face à la recherche d'exercices moins triviaux et guidés.

J'utiliserai alors des problèmes peu guidés où l'élève doit faire un effort de réflexion et établir sa propre démarche pour trouver la solution.

1-2- Problèmes ouverts

En effet, je pense que l'utilisation de problèmes ouverts semble appropriée. Il s'agit d'exercices ayant les caractéristiques suivantes :

- « - l'énoncé est court.
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type *montrer que*).
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement *possession* de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. »⁴

Illustrons ce type d'exercice par un exemple :

« Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que : $1 = \text{Erreur!} + \text{Erreur!}$
? »⁴

Mais, ce type de problème ne me permettra peut-être pas réellement de faire ressortir la stratégie employée par les élèves.

1-3- Narrations de recherche

Quels peuvent être les intérêts d'utilisation de cette pratique pédagogique ?

Elle permet

« de faire raconter par l'élève lui-même la suite des actions qu'il a réalisées au cours de la recherche. »⁵

En ôtant la phase rédactionnelle d'un problème, il est possible de mieux observer quels sont ses obstacles, sa démarche ...

Cette pratique permet aussi de

« développer la curiosité et l'esprit critique des élèves, les mettre dans des situations de recherche motivantes, qui leur donnent le goût de faire des mathématiques. »⁵

⁴ Cf. Problème ouvert et Situation-Problème, I.R.E.M. de Lyon

⁵ Cf. Narration de Recherche : une Nouvelle Pratique Pédagogique de Mireille Sauter, I.R.E.M de Montpellier

Ainsi, les élèves qui ne voulaient pas faire l'exercice, risquent de vouloir se réintégrer dans le groupe classe afin de participer et de montrer qu'eux aussi sont capables de chercher et de formuler des hypothèses de solution.

Cette pratique oblige l'élève :

- à raconter les étapes de sa démarche, de son raisonnement
- à vérifier ses propos

Il pourra alors prendre conscience d'erreurs et donc changer de stratégie.

- à argumenter les résultats

En résumé,

« l'élève doit se poser le plus de "pourquoi" possibles lorsqu'il émet des conjectures, s'interroger toujours sur la validité de ses résultats, effectuer des vérifications. »⁶

Il sera alors possible d'exploiter plus facilement ce travail de manière à en faire ressortir les articulations, les étapes de leur recherche.

2- Thèmes exploités

Les deux principaux thèmes que j'utiliserai pour mes expériences sont :

Les fonctions et les équations.

Pour les fonctions, j'exploiterai surtout le côté visuel de leur représentation graphique.

Pour les équations, je ne considérerai que des équations des types suivants :

- Equations du premier degré : $ax + b = 0$
- Equations produits : $(ax + b)(cx + d) = 0$

⁶ Cf. Narration de Recherche : une Nouvelle Pratique Pédagogique de Mireille Sauter, I.R.E.M de Montpellier

PREMIERE EXPERIENCE

But : Analyser la méthode de recherche des élèves

Je vais m'intéresser plus particulièrement à la phase d'analyse et à la phase d'exécution.

1- Présentation

Je propose un problème de type ouvert sur les fonctions (annexe 1).

Je souhaite connaître la démarche, le cheminement des élèves lors de la recherche d'un problème.

2- Dispositif

Dans un premier temps, je leur demande de me rendre uniquement leur brouillon de recherche. Par la suite, j'en extrais six intéressants. Puis les élèves les utilisent, par groupe de trois ou quatre, afin qu'ils puissent les analyser pour établir un nouveau brouillon de recherche. Ainsi ils pourront rédiger une solution du problème initial.

3- Premières réactions des élèves

« A quoi cela va-t-il servir ? Pour moi, chercher un problème, c'est trouver la solution. Je ne fais jamais de brouillon, c'est une perte de temps et surtout cela est totalement inutile. Et puis, je ne sais pas comment il faut faire, personne ne m'a jamais appris. »

Me voici donc confronter à un sérieux problème.

Les élèves ne semblent pas prêts à jouer le jeu. Les résultats risquent donc d'être un peu difficile à comprendre et à exploiter.

4 - Analyse des copies d'élèves

4 -1- 1^{er} brouillons de recherche

a- Compte-rendu des réponses

Je regroupe les réponses similaires à l'aide de cinq critères.

Contenu de la copie	Nb	Remarques	- Commentaires
Courbes dessinées sans explication	9	Réponses justes : 3	Réponses fausses : 6
Courbes dessinées avec explication	5	Réponses justes : 3	Réponses fausses : 2
Aucune courbe, copie blanche	17	Phrase «je n'ai rien compris » : 7 fois	
Analyse de l'énoncé	2		
Analyse de l'énoncé + début de la phase d'exécution	1		

b- Premier constat

Une analyse rapide et sommaire du tableau nous montre que les élèves ne connaissent pas vraiment la signification du mot recherche.

Pour eux, chercher un problème, c'est trouver obligatoirement la bonne solution, répondre à la question posée par le problème.

L'exercice demande de représenter graphiquement deux fonctions, il est donc logique, de leur point de vue, que leur brouillon de recherche ne comporte que les courbes représentatives des fonctions sans aucune explication sur leur construction. En fait, ils n'ont pas compris ce que je leur demandais :

- expliquer leur raisonnement.
- expliquer la construction des représentations graphiques des deux fonctions.

L'objectif principal n'est donc pas, comme ils ont pu l'entendre, de trouver la solution. Il sera donc nécessaire que lors de la seconde étape, j'explique à nouveau clairement le but de cet exercice.

c- Exploitation suivant les cinq critères

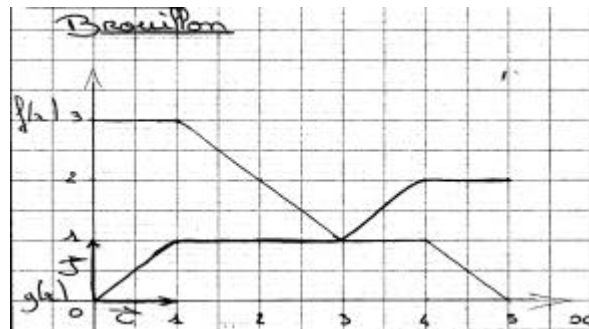
c-1- Courbes dessinées sans explication (annexe 2)

Je note qu'environ un quart des élèves n'explique à aucun moment leurs résultats, comment ils y sont parvenus.

Ils me dessinent deux courbes et en nomment une •f et l'autre •g. Pourquoi ? Comment ont-ils tracé ces deux courbes ?

J'ai donc décidé de demander des explications à un élève sur ces courbes afin de comprendre sa démarche. Je lui présente sa copie plus l'énoncé du problème.

Copie de l'élève :



Dialogue avec l'élève :

Professeur : « Comment as-tu fait pour tracer ces deux courbes ? »

Elève : « J'ai regardé le chemin sur lequel se déplace le point M et puis j'ai écrit les points et je les ai placés dans un repère. »

P. : « Où as-tu écrit ces points ? Et, que représentent ces points ? »

E. : « Je les ai notés sur une feuille de brouillon. Ces points représentent les coordonnées de ceux rencontrés lorsque l'on se déplace sur la ligne brisée. On fait prendre à x les valeurs suivantes : 0, 1, 2, 3, 4 et 5. »

(L'élève me montre, en même temps sur le dessin, les six points par lesquels le point M passe.)

P. : « Pourquoi ne m'as-tu pas écrit toutes les explications que tu viens de me dire par oral ? »

E. : « Ceci ne fait pas parti d'un brouillon de recherche. »

Cet élève a compris l'exercice et a bien mis en œuvre un processus de recherche, mais il n'a pas su retranscrire par écrit son raisonnement. Il a fait deux brouillons, dont un ne fait pas partie de la recherche proprement dite d'après ses propos !

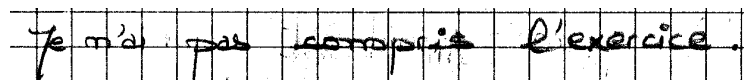
Donc, pour savoir comment ces élèves ont construit les courbes, il faudrait que je puisse avoir connaissance des brouillons de brouillon.

Dans ce cas, je suis en présence du troisième type de blocage : les élèves ne savent pas rendre intelligible leur solution.

Une aide possible est de leur proposer un exercice où ils doivent écrire toutes les étapes de recherche. Ils seront alors obligés de faire apparaître toutes leurs idées, leur raisonnement en entier.

c-2- Copies blanches (annexe 3)

La moitié des élèves m'a rendu une copie blanche. Certains ont juste recopié l'énoncé et d'autres m'ont écrit cette phrase fatidique :



Je n'ai pas compris l'exercice.

Je ne peux pas en conclure obligatoirement que ces élèves n'ont rien compris et n'ont aucune idée sur la résolution de ce problème. Le plus souvent, il s'agit d'élèves en difficulté qui ont perdu confiance en eux.

Ils partent perdant avant même d'avoir commencé. Ils sont certains que quel que soit le processus qu'ils établiront, il est impossible qu'ils trouvent la solution. Ils ne savent plus comment débiter un problème. Ils font un blocage qui est plus psychologique que dû à une mauvaise compréhension du problème (premier blocage dans la recherche d'un problème).

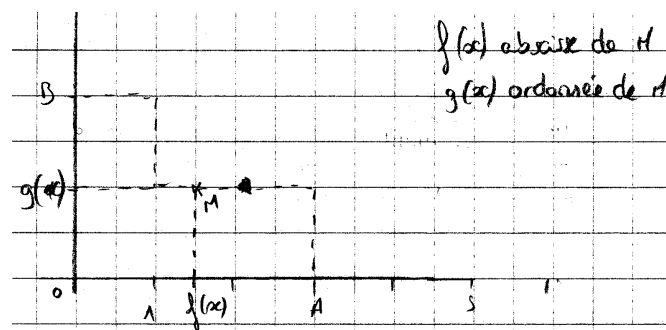
Un travail en groupe peut être la clé pour qu'ils reprennent confiance en eux. La présence d'autres élèves sera un atout non négligeable pour confirmer, pour corroborer leurs idées.

c-3- Copies comportant une analyse du problème

Un petit nombre d'élèves a fait uniquement l'analyse du problème. Ils ont juste "dégrossi" l'exercice mais ils n'ont pas su mettre en œuvre la méthode explicitée.

Je m'aperçois qu'ils ont l'impression de n'avoir rien compris et que le travail rendu ne représente pour eux qu'une copie de l'énoncé et qu'il n'apporte rien de nouveau.

Par exemple, regardons le début de la recherche d'un élève(annexe 4) :



Il a pris connaissance des données du problème et les a reformulées à l'aide d'un dessin. Il a traduit une partie de l'énoncé.

Ces élèves sont donc bloqués dans la deuxième partie de la recherche d'un problème : mettre en œuvre une technique.

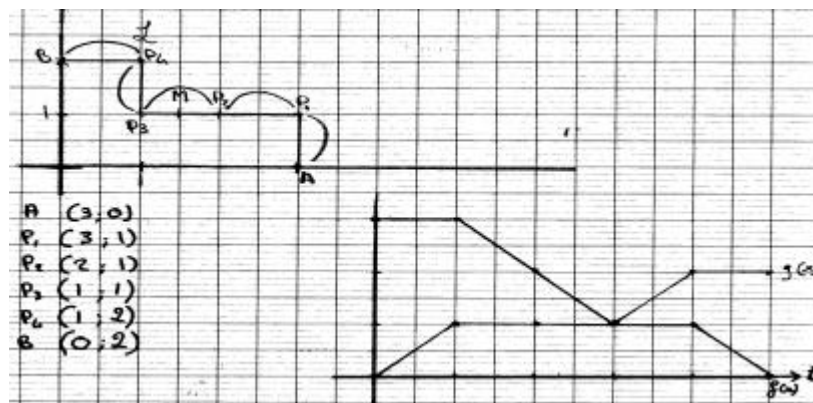
Ils ont trouvé des idées pour résoudre l'exercice, ils ont conceptualisé le problème. Ce blocage est souvent d'origine psychologique puisqu'ils affirment n'avoir aucune idée. Il faut les mettre en confiance pour qu'ils les appliquent.

Un travail de groupe sera peut-être aussi la clé pour les débloquent. En effet, les autres élèves pourront exploiter les idées qu'ils auront mises en avant et leur prouver que leurs dires sont fondés, justes et utiles dans la résolution du problème.

c-4 - Copies comportant les courbes avec des explications

Quelques élèves ont compris que le but de cet exercice n'est pas de trouver obligatoirement la bonne solution mais de donner les étapes de leur recherche : qu'est-ce qu'il leur a permis de construire de telles courbes ?

Prenons par exemple, ce brouillon (annexe 5) :



L'élève a d'abord fait une analyse de l'énoncé et l'a interprété graphiquement en complétant le schéma donné initialement. Ensuite, il a prélevé les informations utiles sur ce nouveau schéma pour la construction des deux courbes.

Il est vrai que quelques renseignements de transition, nécessaire à une meilleure compréhension ne sont pas indiqués :

- Pourquoi avoir placé P1, P2 ... à ces endroits là ?
- Que faire des coordonnées de ces points ?
- Quel est le lien entre les représentations graphiques de ces deux courbes et ces six points ?

Afin d'y trouver une explication, j'ai posé ces questions à l'élève ayant établi ce brouillon.

Voici sa réponse :

« A, P1, P2, P3, P4 et B représentent les différents moments par lesquels passent le point M lors de son déplacement sur la ligne brisée L .

- Quand $x = 0$, la point M est en A.
- Quand $x = 1$, il est en P1, c'est-à-dire il s'est déplacé d'une unité sur le ligne brisée L .
- Et ainsi de suite, jusque ce que x prenne la valeur 5.

Ensuite, je lis les coordonnées de ces six points. Les abscisses correspondent aux valeurs prises par $f(x)$ et les ordonnées à celles de $g(x)$. Par exemple, pour $x = 0$, M est en A : $f(0) = 3$ et $g(0) = 0$. »

Ces explications m'ont permis d'observer que cet élève a compris le problème et sait organiser la recherche d'un problème en trois étapes : analyse – exécution – synthèse.

Il n'a retranscrit sur le papier que les étapes qu'il a jugées essentielles pour la rédaction du problème.

Ces élèves ont donc joué le jeu : ils ont fait un "vrai" brouillon de recherche. Il est tout de même nécessaire de leur faire travailler la dernière phase d'une recherche : expliciter plus clairement leur méthode, la rendre plus intelligible pour une tierce personne.

Leur donner un exercice où ils doivent écrire toutes les étapes de leur raisonnement peut permettre d'y remédier.

d- Synthèse

Ces brouillons reflètent le fait que les élèves n'ont pas l'habitude d'établir uniquement un brouillon de recherche.

Pour la construction du brouillon de recherche collectif, je choisirai judicieusement six brouillons afin de mettre en avant les différentes phases d'une recherche. Ainsi ils seront obligés d'expliquer leur démarche.

4 -2- 2nd brouillons de recherche

a- Choix des brouillons des élèves (annexe 6)

J'ai décidé de choisir parmi les copies six recherches différentes :

- Trois représentations graphiques des fonctions f et g
- Deux schémas analysant l'énoncé du problème
- Un tableau permettant la réalisation des courbes

J'ai choisi de ne pas mettre la bonne représentation graphique des deux courbes f et g. En effet, je veux voir comment les élèves différencient "le vrai du faux".

b- Compte-rendu des réponses (annexe 7)

Nb. de groupe	Analyse des 6 brouillons	Organisation de la recherche	Résultat
1	Aucune analyse	Elaboration complète à nouveau de la recherche.	Deux courbes.
2	Classement oral : juste ou faux.	Exploitation des brouillons retenus. Justification de ce choix et structure de la recherche.	Deux courbes.
1	Classement : juste ou faux.	Exploitation uniquement de deux brouillons jugés justes.	Deux courbes.
1	Classement : juste ou faux. Justification du choix.	Pas d'exploitation de cette analyse. Aucune recherche.	Pas de réponse.
1	Classement : juste ou faux. Justification du choix.	Etude linéaire des brouillons. Un doit être la réponse au problème.	Deux courbes d'un brouillon
1	Classement minutieux : juste ou faux. Souci de la justification.	Articulation de la recherche avec les brouillons justes. Liens entre les étapes.	Deux courbes.

c- Premier constat

Pourquoi ont-ils eu tous l'idée de classer les brouillons en deux catégories : juste ou faux ?

La consigne orale de cette seconde partie d'expérience était :

« Etablissez un nouveau brouillon de recherche en utilisant les documents donnés. Vous finirez votre recherche par la construction des deux courbes demandées. Vous désignerez un secrétaire par groupe. »

A aucun moment, je n'ai demandé un tel classement !

J'ai souhaité avoir une explication sur les raisons de cette pratique. Je me suis alors intéressée au groupe qui n'a pas utilisé les brouillons et celui qui était certain que la solution du problème se trouve dans le document.

En interrogeant les premiers, j'ai récolté les dires suivants :

« On ne les comprend pas. Nous ne voyons pas comment ils peuvent nous servir dans notre recherche. Nous avons préféré réfléchir à nouveau sur le problème, mettre nos idées en commun pour en ressortir une solution. Et la bonne bien sûr ! »

Ces différents brouillons les embarrassent plus qu'ils ne les aident à en réaliser un nouveau.

L'autre groupe m'a expliqué :

« C'est obligé qu'un des brouillons soit juste. Vous nous avez donné cette feuille et c'est vous qui avez fait ce choix. Il est donc logique qu'une des courbes soit la bonne. »

Dans ce cas, les brouillons sont plus un obstacle qu'une aide à la réalisation d'une nouvelle recherche.

Ces élèves se focalisent sur le document et veulent prouver leur dire par tous les moyens.

Je leur ai indiqué de bien faire une analogie entre l'énoncé et les documents donnés. Mais, il n'y a pas eu de changement. Ils sont restés sur leur première idée et la conclusion fut :

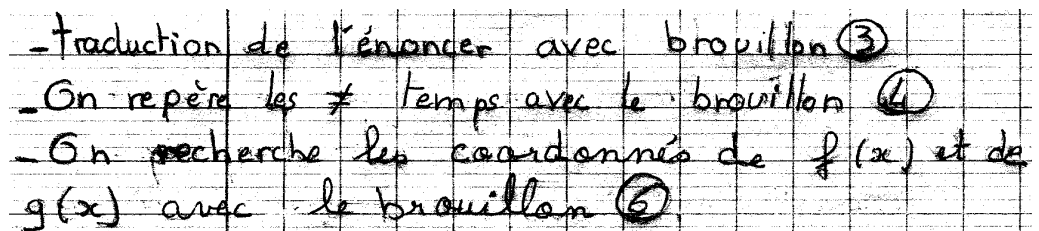
The image shows a handwritten sentence on a grid background. The text is written in black ink and reads "Ce schéma 5 est le bon". The handwriting is somewhat cursive and appears to be from a child or a student. The grid lines are thin and light gray.

d- Exploitation

La majorité des groupes a su utiliser les brouillons afin d'en créer un. Ils ont mis en œuvre une réelle démarche de recherche avec une phase d'analyse, une phase d'exécution et une phase de synthèse parfois un peu tronquée. En effet, il est plutôt rare qu'ils aient réorganisé leur raisonnement afin de le rendre plus claire et plus progressif.

Même le groupe qui n'a pas utilisé le document a organisé sa recherche de manière similaire. Je leur ai tout de même demandé de réfléchir sur ces brouillons pour qu'ils essaient de voir lesquels ils auraient pu utiliser. Ils les ont alors recoupés avec les différentes étapes de leur recherche et ils ont compris leur utilité.

Cependant, il est intéressant de noter qu'un groupe a su synthétiser pertinemment son analyse des six brouillons de façon à construire :



- Traduction de l'énoncé avec brouillon ③
- On repère les \neq temps avec le brouillon ④
- On recherche les coordonnées de $f(x)$ et de $g(x)$ avec le brouillon ⑥

e- Synthèse

Chaque groupe a eu ses propres difficultés lors de la mise en route de cet exercice. Ils ont dû d'abord prendre possession des documents, les analyser, les classer, les exploiter, prendre du recul sur leurs écrits, pour pouvoir enfin établir leur propre brouillon de recherche et construire les deux courbes.

5- Conclusion de l'expérience

Cette expérience a permis de faire réfléchir les élèves par groupe sur un problème. Ce travail collectif a été un bon moyen pour en débloquent certains qui n'avaient pas réussi à résoudre le problème ou d'autres qui avaient une idée mais qui n'arrivaient pas à l'exploiter. Ils ont ainsi tous mis en œuvre les trois phases d'une recherche sans s'en rendre compte.

Cependant, les élèves montrent une difficulté à se mettre en situation de recherche. Il va donc falloir que je trouve un moyen pour les obliger à réfléchir de façon plus approfondie sur la phase d'analyse d'un problème et à écrire leur raisonnement en entier.

SECONDE EXPERIENCE

But : Construction d'une "grille d'étude" pour faciliter la résolution des équations pour les élèves.

Je m'intéresserai aux trois phases d'une recherche, en particulier aux deux premières.

1- Présentation

Cette expérience va se dérouler en trois étapes.

La première étape consiste à tester lors d'un devoir en classe quels types d'équations ils savent résoudre.

Dans une deuxième étape, je propose aux élèves de faire une narration de recherche sur la résolution de cinq équations. Ensuite, ils établissent par groupe de deux une liste de questions qu'ils peuvent se poser pour résoudre une équation.

Dans une troisième étape, j'établis une liste récapitulative de leurs questions. Je la soumetts à la classe afin de construire une "grille d'étude" pour résoudre une équation.

Notons que l'objectif de cette expérience n'est pas d'obtenir obligatoirement la solution, mais plutôt de trouver l'outil adapté pour résoudre une équation.

2- Dispositif

Lors du devoir en classe, je propose quatre équations du type 1 ($ax + b = 0$) et du type 2 ($(ax + b)(cx + d) = 0$).

Je propose cinq équations qui se résolvent soit en développant, soit en factorisant, soit aussi bien avec l'une ou l'autre des techniques.

Les élèves travaillent d'abord de manière individuelle. Ils expliquent comment résoudre ces équations afin de faire ressortir les étapes, les articulations de leur raisonnement.

Ensuite, je les regroupe par deux, de façon à ce qu'ils confrontent leurs idées et qu'ils établissent une liste de questions qu'il est possible de se poser pour résoudre d'une équation. Ils utilisent leurs écrits de la narration de recherche.

Pendant la seconde étape, la classe entière organise les questions à se poser lors de la résolution d'une équation avec l'aide de la liste récapitulative.

Ils établissent une "grille d'étude" qu'ils testent ensuite sur quatre équations.

3- Premières réactions des élèves

Les deux dernières étapes de cette expérience ont été réalisées sans trop de réticence de la part des élèves. Dès le début, ils ont compris l'objectif final : construire une "grille d'étude" pour les aider lors de la résolution d'une équation. J'ai relevé les propos suivants :

« Super, je vais enfin me poser les bonnes questions et surtout ne pas choisir de développer ou factoriser au hasard. »

A présent, je devais tout mettre en œuvre pour garder cette motivation.

4 - Analyse des copies d'élèves

4 -1- 1^{ère} étape

a- Présentation des équations du test (annexe 8)

Je propose de résoudre quatre équations :

- Deux du type 1 $ax + b = 0$:
 - une où la résolution est directe (équation a).
 - une où l'élève doit développer puis réduire (équation c).
- Deux du type 2 $(ax + b)(cx + d) = 0$:
 - une où la résolution est directe (équation b).
 - une où il faut factoriser deux fois (équation d).

b- Récapitulatif des résultats observés

Equation a	Réponse juste : 31	Réponse fausse : 3
Equation b	Réponse juste : 28	Réponse fausse : 6
Equation c	Méthode utilisée : développer : 25 Réponse juste : 15	Réponse fausse : 19
Equation d	Méthode utilisée : factoriser : 15 Réponse juste : 6	développer : 6 Réponse fausse : 28

c- Commentaire

Si l'équation admet une résolution directe les élèves trouvent la méthode à appliquer sans difficulté. Par contre, les élèves sont désorientés dès qu'il faut effectuer une transformation.

Dans le cas où il faut développer, les élèves y pensent majoritairement, même si l'exécution n'aboutit pas toujours à la solution. La factorisation est réussie lorsqu'il faut reconnaître une identité remarquable. La présence d'un facteur commun ne déclenche quant à elle aucune réaction de la part des élèves.

d- Synthèse

Les élèves connaissent les différentes techniques pour résoudre une équation. A présent, il faut qu'ils sachent mieux analyser une équation pour choisir la technique adaptée.

Il faudra donc que je choisisse des équations dont la résolution n'est pas directe. Il sera aussi intéressant que certaines puissent aussi bien se résoudre en factorisant qu'en développant.

4 -2- 2^{ème} étape

a- Choix des équations (annexe 9)

Sur les cinq équations, j'en ai choisi trois qui peuvent aussi bien se résoudre en factorisant qu'en développant (équations a, c, d). Les deux autres se résolvent soit en développant (équation b) soit en factorisant (équation e).

b- Observations des narrations de recherche (annexe 10)

	Réponses des élèves
Equation a	Développer : 20 Factoriser : 10 Rien : 4
Equation b	Développer : 33 Factoriser : 1
Equation c	Développer : 22 Factoriser : 12
Equation d	Développer : 17 Factoriser : 9 Développer + factoriser : 5 Rien : 3
Equation e	Reconnaître équation produit : 18 Seconde factorisation : 12 Rien : 4

c- Exploitation

Quelle que soit l'équation donnée, l'élève fonce souvent tête baissée dans des calculs et préfère développer plutôt que factoriser !

La première phase de recherche - analyse de l'équation - se résume le plus souvent à regarder s'il y a une identité remarquable.

Par exemple pour l'équation a, on a le choix entre deux formes :

$$a^2 - b^2 \quad \text{ou} \quad (a + b)^2.$$

Dans la majorité des cas, les élèves en ont reconnu une et on lit :

\rightarrow On développe $(a+b)^2 \rightarrow$ c'est une identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pour éviter les carrés
---	--

Donc, si cette transformation d'écriture n'est pas adaptée à la résolution de l'équation (elle complique son écriture en faisant apparaître des x^2 ...), l'élève stoppe alors ses calculs. Il est bloqué. A aucun moment, il ne remet en question le choix de la méthode et tente d'en utiliser une autre.

Le blocage semble se situer dans la phase d'exécution.

L'élève applique une méthode. Si ce n'est pas la bonne, il faut donc qu'il réitère le procédé, c'est-à-dire qu'il analyse à nouveau le problème pour en trouver une autre. Il constate à nouveau que changer de logique reste une étape mentale difficile à effectuer.

Mais en fait, l'élève n'a pas su faire une analyse complète du problème.

Dès qu'il trouve une méthode, il l'applique directement. Il n'en envisage pas une de secours dans le cas où celle retenue n'aboutirait pas.

Voici la raison pour laquelle je leur ai demandé d'établir une liste de questions qu'il pourrait se poser durant la résolution d'une équation.

En lisant leurs questions (annexe 11), je retrouve toujours les mêmes :

Y a-t-il une identité remarquable ? Faut-il développer ou factoriser ?	Est-ce qu'il y a un facteur commun pour pouvoir factoriser ?
Faut-il transformer l'équation en équation produit pour éviter une équation du 2 nd degré ?	

d- Synthèse

Cette narration de recherche m'a permis à nouveau de me rendre compte que les élèves peuvent rester bloqués devant une équation non pas parce qu'ils ne connaissent pas les techniques de résolution, mais plutôt parce qu'ils n'ont pas choisi celle qui était adaptée ou ne savent pas laquelle choisir.

Cette connaissance des techniques de résolution est réapparue lorsque j'ai listé leurs questions.

Les élèves savent très bien quel est le questionnement à se poser face à une équation. Mais, il n'y a aucune logique dans l'ordre d'apparition des questions.

La troisième étape sera avant tout la réalisation d'un classement de leurs questions dans un ordre chronologique.

4 -3- 3^{ème} étape

a- Préparation

Je prépare sur une feuille un récapitulatif de toutes les questions que j'ai récoltées sur leurs copies (annexe 12). Je la distribue aux élèves qui en prennent connaissance individuellement pendant cinq minutes environ.

b- Elaboration de la "grille d'étude"

Dans un premier temps, j'écris deux équations au tableau :

$$x^3 - 4x = 0 \text{ et équation b de la narration de recherche (annexe 9).}$$

Je leur demande alors :

« Quel est la première question que l'on se pose pour résoudre ces équations ? »

Plusieurs réponses sont émises. Une discussion mène à choisir cette question :

« Suis-je capable de la résoudre directement ? »

Ensuite, s'enchaîne une série de questions relatives à la résolution d'une équation. Il faut à présent les classer dans un ordre chronologique. Il en ressort une "grille d'étude" (annexe 13).

c- Test de cette "grille d'étude"

Je leur donne quatre équations à résoudre (annexe 14). Les élèves s'imprègnent petit à petit des questions à se poser. Au début, ils appliquent scrupuleusement la "grille d'étude", mais lors de la dernière équation, ils se rendent compte qu'il est possible que les deux techniques (développer et factoriser) soient utilisables, et que ce n'est pas toujours celle trouvée en premier par la grille qui est la plus rapide et la plus simple. Ils constatent l'importance de l'adapter et de l'analyse de l'équation.

d- Synthèse

Cette "grille d'étude" aura permis à certains élèves de se débloquent lors de la première phase d'une recherche et d'autres lors de l'exécution. A présent, ils réfléchissent d'avantage avant de se lancer dans la résolution d'une équation. Et ils ont un outil, qu'ils ont construit, qui leur permet de se débloquent sans une aide extérieure lors de la résolution d'une équation.

5- Conclusion de l'expérience

Cette dernière expérience aura permis de mettre en œuvre un processus de recherche sur un problème que des élèves de seconde rencontre en majorité. Ils auront avant tout travaillé les phases d'analyse et d'exécution (la dernière phase est implicite dans la résolution d'une équation). On aura surtout mis l'accent sur l'importance de l'analyse d'une équation. Il ne faut pas se lancer immédiatement dans des calculs. Une étude préalable de sa forme, des termes qui la composent est nécessaire. Les élèves auront aussi appris à construire un objet qui les aidera dans la résolution de n'importe quelle équation et ainsi ils auront été acteur de leur apprentissage.

CONCLUSION

Quelle est donc l'utilité d'un tel travail pour les élèves ?

Il est peut-être un peu tôt pour le dire, mais une chose est certaine, la méthodologie acquise pour la recherche d'un problème pourra être appliquée dans toutes les matières.

En effet, par exemple en français, la recherche d'un sujet de dissertation se décompose en trois étapes :

- Je réfléchis sur le sujet (phase d'analyse en mathématiques).
- J'élabore un plan (phase d'exécution en mathématiques).
- Je synthétise mes notes (phase de synthèse en mathématiques).

Dès lors, un des changements notables dans le comportement des élèves est qu'ils sont acteurs de la construction de leur connaissance. Leur participation aux activités préparatoires est plus déterminée. Les devoirs à la maison sont faits plus sérieusement (uniquement trois copies identiques lors du dernier devoir maison).

Et pour moi, quels sont les changements ?

Dans un premier temps, je me suis interrogée afin de comprendre comment je structurais une recherche.

Puis, au fur et à mesure que je progressais dans l'analyse du mécanisme d'une recherche, j'ai effectué des changements dans ma pratique.

Mes objectifs sont maintenant plus axés sur les élèves que sur le savoir. Je veux qu'ils comprennent et qu'ils construisent eux-mêmes leur connaissance. J'ai donc restructuré ma façon d'enseigner afin de privilégier les élèves.

BIBLIOGRAPHIE

Gilbert ARSAC, Gilles GERMAIN, Michel MANTE (Octobre 1991)

Problème ouvert et situation-problème.

I.R.E.M. de Lyon.

Mireille SAUTER , groupe géométrie (Janvier 1998)

Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique.

I.R.E.M. de Montpellier, Repères n°30.

Michel HENRY (Octobre 1991 – réédition 1995)

Didactique des Mathématiques : Une présentation de la
didactique en vue de la formation des enseignants.

I.R.E.M. de Besançon.