

I.U.F.M.

Académie de Montpellier

Site de Perpignan

BERSOUX Olivier

***COMMENT GERER LA PRISE EN MAIN D'UN ENONCE AFIN QUE
LES ELEVES S'APPROPRIENT UN PROBLEME ET S'ENGAGENT
DANS LE TRAVAIL ?***

Mathématiques

6^{ème}

Collège Pablo Casals de Cabestany

Tuteur du mémoire : Yves Girmens

Assesseur : François Laporte

Année universitaire 2001 – 2002

« Rendez votre élève attentif aux phénomènes de la nature, bientôt vous le rendrez curieux ; mais pour nourrir sa curiosité, ne vous pressez jamais de la satisfaire. Mettez les questions à sa portée et laissez-lui les résoudre. Qu'il ne sache rien parce que vous le lui avez dit, mais parce qu'il l'a compris lui-même : qu'il n'apprenne pas la science, qu'il l'invente. »

Jean-Jacques Rousseau, *Emile*, 1762

Merci à Yves Girmens pour son travail, sa patience et la motivation qu'il communique ; à Julie, Véronique, John, Jacques Vabre et Philip Morris pour leur soutien

RESUME

Dans une classe que le professeur ne maîtrise pas bien, la mise au travail peut s'avérer difficile. Le cas des exercices faits en classe est particulièrement symptomatique : aux difficultés liées à la discipline s'ajoutent celles ressenties par les élèves pour s'approprier la tâche. A partir d'une réflexion théorique sur la façon dont les élèves appréhendent un énoncé (différentiation des données et des consignes, construction d'une représentation personnelle de l'énoncé), ce mémoire cherche à définir l'aide que le professeur doit apporter et la façon dont il doit le faire.

SUMMARY

Creating a favourable working environment in a class which is difficult to control is not an easy task for the teacher. The process of doing exercises during the class reflects clearly this problem: along with the existing difficulties related to the subject, is the pupils ability to apply themselves to the exercise itself. Starting from a theoretical principal of the way in which the pupils comprehend the instructions given in an exercise (differentiation of given information, the building of a their personal perception of the instructions), this essay aims to define the ways in which the teacher should help a class of this type.

I.	Le constat de départ	6
A.	Les difficultés observées	6
B.	Un exemple de « ratage »	7
C.	Qui doit procéder à la lecture de l'énoncé ?	8
D.	Un premier test	9
II.	Une approche psycho-cognitive de la lecture d'un énoncé	11
A.	Qu'est-ce qu'un énoncé ?	11
B.	Qu'est-ce que lire un énoncé ?	12
	1. Processus d'interprétation et de sélection des données	13
	2. Processus de structuration	14
	3. Processus d'opérationnalisation	15
III.	Quel rôle a le professeur ?	18
IV.	Quelle aide a la compréhension de l'énoncé est-il souhaitable d'apporter aux élèves ?	19
A.	Aide ou apprentissage ?	19
B.	Vers l'expérimentation	20
	1. Typologie des tâches et des aides à apporter	20
	2. Les axes de travail	21
V.	Les expérimentations	22
A.	Une aide constante pour un exercice difficile	22
	1. Présentation de la séance	22
	2. Déroulement de la séance	23
B.	Une aide à un moment unique	26
	1. Présentation de l'exercice	26
	2. Place dans la séquence	27
	3. Déroulement de la séance	28
C.	Une reformulation de l'énoncé	28
	1. Analyse de l'exercice	28
	2. Expérimentation en classe	30
	3. Conclusion	31
VI.	Conclusion	31

I. LE CONSTAT DE DEPART

A. *Les difficultés observées*

Le choix de ce sujet de mémoire découle de ma première visite formative. La formatrice avait été effrayée de l'ambiance bruyante qui régnait dans la classe (une sixième). Elle avait diagnostiqué, notamment, des manques dans la manière d'ouvrir les moments dédiés à la recherche propre de l'élève. Les consignes n'étaient pas assez claires pour que tous les élèves comprennent et commencent le travail qui leur était demandé. Soit le professeur n'attendait pas d'avoir l'attention des élèves pour fournir ces consignes. Soit elles n'étaient pas suffisantes (du type « commencez l'exercice 1 »). Or les premières tentatives pour remédier à ce défaut furent laborieuses : dans une classe qui n'a pas été correctement prise en main au départ, il est parfois difficile pour le professeur d'obtenir l'écoute.

Le premier principe à appliquer, une fois ce constat fait, consiste en un choix convenable d'exercices. Si la classe est bruyante, proposer un exercice simple, une application directe du cours permet de mettre facilement au travail une partie de la classe, celle qui, à ce moment-là, est disposée à travailler. Les élèves peuvent travailler en autonomie ; si l'un d'eux ne comprend pas, il peut demander une indication à son voisin. J'imaginai au départ que la mise au travail du reste du groupe classe était alors un problème purement disciplinaire.

Cependant cette solution (proposer des exercices faciles) n'est bien évidemment pas valable à long terme. La sixième est en effet une classe charnière, pendant laquelle il est important que les élèves commencent à comprendre des énoncés de problèmes et à élaborer des stratégies de résolution¹. On différenciera souvent, dans ce mémoire, « exercice » et « problème ». Un des critères retenus pour mettre en évidence cette différence sera le nombre d'étapes, d'opérations, nécessaires à la résolution d'une question. Pour passer de l'application d'une formule ou d'une méthode qui a été donnée dans le cours à la résolution de problèmes, il faut donc que l'élève se pose des questions : que me demande-t-on de faire ? de quelles données disposé-je ? à quelle partie du cours ce problème se rattache-t-il ?

Ce questionnement est surtout possible en présence d'un énoncé de problèmes.

¹ La partie « Travaux numériques » du programme de 6^{ème} s'ouvre sur cette phrase : « Cette partie du programme s'appuie principalement sur la *résolution de problèmes*. »

B. Un exemple de « ratage »

Mais amener les élèves à s'interroger sur l'énoncé n'est pas facile à faire. Ce compte-rendu d'une partie de séance en est une illustration.

« Les roues du vélo de Benoît ont un diamètre de 64 cm. Les roues du vélo de sa fille, Clotilde, ont un rayon de 24 cm.

A chaque tour de pédale, les roues du vélo de Benoît font 3 tours.

A chaque tour de pédale, les roues du vélo de Clotilde font 2 tours.

Benoît et Clotilde vont acheter 3 pains coûtant 1,10 € chacun. Pour cela, ils prennent leurs vélos. Arrivé chez le boulanger, Benoît a compté 500 tours de pédale.

Quelle distance parcourt Benoît à chaque tour de pédale ?

Quelle distance parcourt Clotilde à chaque tour de pédale ?

Quelle distance ont-ils parcourue pour aller chez le boulanger ?

Combien de tours de pédale seront nécessaires à Clotilde pour faire l'aller et le retour ? »

(Les petits manuels d'Hatier, 6^{ème})

Ce problème est proposé en fin de séquence sur le périmètre du cercle. Il propose plusieurs types de difficultés :

- des données inutiles (les 3 pains achetés chez le boulanger) : le piège est suffisamment gros, on va le voir, pour que les élèves l'évitent. De toute manière, l'énoncé comporte suffisamment de nombres pour que l'on ne s'attache pas à ceux-là.
- une distinction entre rayon et diamètre. Il ne faut pas, pour les deux premières questions, mettre en œuvre le même processus opératoire.
- la nécessité de faire plusieurs étapes de calcul pour chaque question.
- un savoir spécifique : la distance parcourue par une roue quand elle fait un tour est égale à son périmètre. Ce savoir demande la vision du rabattement d'une longueur courbe sur une droite, qui est loin d'être acquise en 6^{ème}.
- un piège entre les deux dernières questions, avec la différence entre aller et aller-retour.

Après une lecture hésitante par un élève, (les autres ont pris l'initiative de lire de leur côté), la première question du professeur est : « Comment va-t-on faire pour calculer la distance que parcourt Benoît à chaque tour de pédale ? ».

La question est bienvenue, car, on va le voir, les élèves commencent directement (c'est-à-dire sans une seconde lecture) l'exercice, ce qui, semble-t-il, n'est pas recommandé pour celui-ci. Mais elle est mal posée, pas assez précise, car chaque élève, curieusement, a une idée, qu'il souhaite expliquer. Toutes les propositions des élèves font intervenir le nombre

« 500 ». La question suivante du professeur est : « pensez-vous vraiment que pour calculer la distance parcourue à chaque coup de pédale, il faut utiliser 500, c'est-à-dire le nombre de tours de pédale effectués ? ». Peut-être trop long, ce questionnement n'a aucun effet. Pour les élèves, c'est évident, il faut utiliser 500. Question suivante, pour casser l'engouement des élèves sur 500 et recentrer la recherche : « Quand une roue fait un tour, quelle distance parcourt-elle ? ». Il y a des réponses, mais elles sont plutôt fantaisistes (π , 500, ...) : les élèves n'ont aucune représentation de cette simple question², et *a fortiori* de la première question du problème. Le professeur donne la réponse, agrémentée de dessins au tableau, mais les élèves ne semblent pas convaincus, même si aucun ne formule d'objection. La première question est donc rédigée par le professeur, parfois secondé par des élèves. La seconde question, que les élèves font eux-mêmes, est une simple répétition de la première : le même processus opératoire est appliqué, et il en découle de nombreuses confusions entre rayon et diamètre. On peut penser que les élèves ne regardent plus vraiment l'énoncé dans son ensemble, mais simplement les données et la rédaction de la première question.

Ici, la réflexion *a posteriori* montre que le professeur doit effectivement participer activement à la mise au travail. Une réflexion, provoquée par le professeur, sur la signification des nombres contenus dans l'énoncé ou une représentation graphique dès le départ aurait peut-être pu éviter le dérapage constaté. Dans le cas de ce problème, on peut également s'interroger sur le bien-fondé de faire lire l'énoncé par un élève : il est long, et la première question n'arrive que tard dans l'énoncé. Quand l'élève a fini de lire, il est difficile de se souvenir du début et de se faire une idée générale du problème.

C. Qui doit procéder à la lecture de l'énoncé ?

Plusieurs solutions se présentent.

Si c'est le professeur qui lit l'énoncé, il a en général les yeux baissés, ce qui risque de rompre le contact avec les élèves. De plus, son rythme de lecture n'est pas forcément adapté au rythme de compréhension d'un élève de 11 ans, peu familiarisé avec les notions que l'énoncé met en jeu.

Si c'est un élève qui le lit, on est au moins assuré qu'il aura une idée du sujet et du but de l'énoncé. Les autres élèves sentent qu'ils peuvent eux aussi être interrogés, ce qui améliore leur concentration. Toutefois cette technique présente au minimum trois défauts :

² C'est là la plus grande négligence du professeur. Comme le livre ne propose qu'un seul exercice sur ce sujet, il a oublié de s'assurer que les élèves maîtrisent cette question ou de préparer une activité en préambule. Celle-ci

- les difficultés d'élocution de la majorité des élèves ;
- le volume de la voix, éventuellement insuffisant chez des élèves de 6^{ème} ;
- le fait qu'il semble, dans cette classe, que les élèves accordent moins d'importance à la parole d'un autre élève qu'à celle du professeur.

La lecture peut enfin se faire individuellement et silencieusement. Le professeur peut alors repérer facilement les élèves qui ne sont pas concentrés. Mais il n'a aucun moyen de voir si les élèves lisent l'énoncé d'une manière active, en essayant de comprendre au fur et à mesure, le lisent d'une manière purement linéaire ou font semblant de le lire, perdus dans leurs pensées. Le professeur doit donc, à la suite de cette lecture individuelle, interroger les élèves pour s'assurer auprès de quelques-uns d'entre eux qu'ils ont bien compris ce qui leur est donné et ce qui leur est demandé. On est alors sûr que ces élèves ont bien lu ; il reste à voir s'ils ont compris.

Mais avant d'aller plus loin et d'éventuellement décider quelle est l'attitude qui convient le mieux à tel type d'énoncé, il faut poser ces questions fondamentales : qu'est-ce qu'un énoncé ? qu'est-ce que comprendre un énoncé ? qu'est-ce qui pousse l'élève à entrer dans la tâche ?

D. Un premier test

Pour mieux comprendre le rapport que les élèves entretiennent avec les énoncés de problème, j'ai mené deux expériences avant de commencer l'étude théorique liée à ce mémoire. La première, déjà citée, consistait en un devoir à la maison, dans lequel une partie du travail demandé aux élèves était une réflexion sur l'énoncé³. La deuxième est expliquée ci-dessous.

Le principe est de proposer des énoncés incomplets aux élèves. Cette particularité de l'exercice est explicitée longuement. Le but de l'exercice est d'abord de trouver quelle donnée permettrait de répondre à la question, puis de répondre à la consigne. Les énoncés incomplets sont écrits au tableau et doivent être recopiés par les élèves.

Premier exercice incomplet :

« Pour arriver en haut du phare de Brest, il faut monter 216 marches. Quelle est la hauteur du phare de Brest ? ».

ne sera faite qu'à la séance suivante.

³ Voir annexe.

Dans cet exemple (et c'est son but), les élèves comprennent qu'il manque une donnée : en effet, il n'y a qu'un seul nombre dans l'énoncé, ce qui ne permet pas de faire d'opération. Une discussion assez courte permet de faire remonter le type de donnée manquante.

Deuxième exercice incomplet :

« Si Hélène achète 12 tartelettes, il lui reste 0,48 €. Elle préfère acheter des gâteaux coûtant 1,60 € l'un. Combien peut-elle en acheter ? Que lui restera-t-il alors ? »

Deux « données manquantes » sont ici possibles : le prix d'une tartelette ou la somme dont dispose Hélène. L'expérience a montré que, dans cette classe, aucun élève n'a proposé la deuxième. On peut imaginer que les élèves cherchent à établir un parallèle entre les deux achats, parallèle qu'on pourrait symboliser par le tableau suivant :

1 ^{er} achat	2 ^{ème} achat
12 tartelettes	« x » gâteaux
Prix d'une tartelette	1,60 € par gâteau

Cet énoncé incomplet présente une difficulté supplémentaire par rapport au premier : on peut parfaitement faire des opérations avec les nombres donnés par l'énoncé. Une partie des élèves (une dizaine environ sur vingt-cinq) commence, dès la fin du recopiage de l'énoncé, dans des calculs. Le professeur rappelle à certains de ceux-là la consigne globale (trouver la donnée manquante). D'autres se font arrêter par leur voisin de table. Le groupe des « fonceurs » se divise alors en deux camps :

- certains font de leur calcul un véritable objet d'étude : ils demandent une calculatrice à un voisin ou s'interrogent sur la justesse de leur opération. L'énoncé a repris son statut habituel d' « injonction », il n'est plus un objet d'étude ;
- d'autres réalisent leur erreur et recherchent la donnée manquante : ces élèves là sont plutôt ceux qui, placés à côté d'un élève plus réfléchi, se voient souffler l'idée de la donnée manquante.

Cette expérience montre que certains élèves ont intégré de manière forte ce que Jean Julo appelle des « schémas de problèmes ». C'est-à-dire que, s'ils sont mis en présence d'un paragraphe ressemblant fortement à un énoncé classique (tel qu'on en voit en CM1 et CM2), ils vont se lancer dans une procédure de résolution mécanique, automatisée : prendre des nombres et les manipuler.

On peut aussi interpréter la précipitation de ces élèves en remarquant une rupture du contrat didactique : ici le professeur propose un exercice qu'il ne faut pas résoudre immédiatement. Ce constat vient renforcer l'impression de difficulté éprouvée par un professeur quand il commence une aide à la compréhension d'un énoncé. D'un côté, le professeur débutant imagine qu'en indiquant un exercice aux élèves, ils vont se mettre

automatiquement au travail, ce que l'expérience dément. D'un autre côté, il remarque que dans certaines conditions (comme dans le cas des énoncés incomplets), des élèves, à l'inverse, se mettent « trop tôt » au travail.

II. UNE APPROCHE PSYCHO-COGNITIVE DE LA LECTURE D'UN ENONCE

A. *Qu'est-ce qu'un énoncé ?*

Jean-Michel Zakhartchouk⁴ distingue, à l'intérieur de l'exercice, deux parties : les données et la consigne. Il donne de cette dernière la définition suivante : « injonction donnée à des élèves pour effectuer telle ou telle tâche »⁵. La consigne fait donc partie de l'ensemble des textes injonctifs (qui diffèrent des textes informatifs, descriptifs, indiscutables, incitatifs et narratifs). Certes un énoncé de problème mathématique peut prendre la forme d'un récit, d'une notice, d'une information, mais son but ultime, sa *fonction*⁶, reste l'injonction de travailler. Et cette injonction est différente de celle que contient une recette ou un mode d'emploi, puisqu'il y a obligation de la suivre. Ceci implique une certaine stratégie de lecture, liée au contrat didactique qui se met en place lorsqu'un professeur demande aux élèves de résoudre un exercice. Dernière spécificité de la consigne, sa finalité n'est pas celle d'un quelconque autre texte injonctif : lorsque l'on suit une recette, seul le résultat compte (que l'on fasse fondre le chocolat au micro-onde ou au bain-marie importe moins que le goût final du gâteau) ; lorsque l'on résout un problème, c'est exactement l'inverse⁷. Lors des évaluations sommatives, par exemple, le professeur cherche à vérifier que l'élève a compris, retenu et assimilé une notion.

L'énoncé, pour l'élève, est donc une injonction dotée d'un caractère obligatoire. En revanche, l'attente du professeur, elle, n'est pas toujours la même. Ses critères de notation (le mot « notation » étant ici utilisé au sens large : appréciation pendant un cours ou note d'un

⁴ Comprendre les énoncés et les consignes, Cahiers Pédagogiques, CRDP d'Amiens, 1999.

⁵ Il ajoute qu'une consigne peut être implicite ou explicite. Pour une étude sur une classe de sixième, il convient de se limiter au premier type.

⁶ Il faut remarquer que Jean-Michel Zakhartchouk se limite volontairement à l'aspect fonctionnel, et à la structure sémantique de la consigne.

⁷ Le cheminement intellectuel, la démonstration et la rédaction sont tout aussi importants que la présence de la réponse attendue

devoir) diffèrent suivant ce qu'il attend des élèves. On peut, en schématisant, classer ces attentes en 3 catégories. Le professeur souhaite :

- que les élèves utilisent une méthode : c'est le cas des exercices d'application directe du cours ;
- qu'ils surmontent une difficulté technique (une opération difficile, une construction géométrique qui demande de la précision, un cas particulier) ;
- qu'ils imaginent un enchaînement d'opérations : c'est le cas habituel des problèmes par rapport aux exercices.

B. Qu'est-ce que lire un énoncé ?

Tout d'abord, la lecture d'un énoncé demande de faire la distinction entre ses deux parties, informative et injonctive. En classe de 6^{ème}, l'énoncé mathématique les distingue souvent nettement. Un retour à la ligne marque souvent une séparation claire. L'utilisation d'un présent à valeur atemporelle pour les données (du type « Jean a trois bonbons ») et l'emploi d'un impératif, d'un infinitif, d'un futur ou, plus rarement, d'un présent pour la consigne permettent également cette distinction.

Pourtant la finalité de la lecture n'est pas dans la distinction entre données et consigne. Quand on demande aux élèves de souligner ce qui leur paraît constituer les données du problème en rouge et ce qu'il leur paraît être la consigne en bleu, on note un taux extrêmement réduit d'erreur⁸. Pour autant, la réussite de l'exercice n'est absolument pas assurée. Il semble donc que la distinction entre données et consigne puisse s'opérer machinalement, l'élève repérant l'habituelle fracture typographique et sémantique ; et que pour autant les deux parties ne soient pas mises en relation de manière correcte du point de vue mathématique.

La compréhension d'un énoncé ne se limite donc pas à celle des mots, des données ou des phrases qui le constituent. Cette compréhension se situe aussi dans la visualisation de la tâche à effectuer. Comme l'écrit Jean-Michel Zakhartchouk, ce n'est pas la clarté de l'énoncé que le professeur doit rechercher, mais « celle du contrat explicite qui se noue dans la consigne ».

« Comprendre » quelque chose, ce serait, selon Jean Julio⁹, se construire une représentation de cette chose. La représentation, au sens où l'entend la psychologie cognitive,

⁸ Voir annexe.

⁹ Jean Julio, représentation des problèmes et réussite en mathématiques, Presses Universitaires de Rennes.

n'est pas une simple photographie de ce qui nous entoure : la notion de « construction » est fondamentale. Certaines représentations sont stables (on parle alors de connaissances) ; certaines sont ponctuelles, particularisées : ce sont elles qui vont s'élaborer au cours de la résolution d'un exercice, et ce sont elles qui vont plus précisément nous intéresser.

Un énoncé de problème est caractérisé, en premier lieu, par un but. La représentation du problème comprend donc la représentation de la tâche à effectuer et celle de son lien avec le texte. On voit qu'on ne se limite plus, dans cette analyse, à la différenciation des données et de la tâche : on suppose que l'individu confronté à un problème l'aborde de manière globale. Deuxième point qui fait la spécificité de l'énoncé mathématique dans l'analyse de Jean Julo : l'énoncé, parce qu'il n'explique pas tout, qu'il entretient une part de mystère (le résultat qu'il faut trouver), laisse une plus grande autonomie au lecteur dans sa représentation.

Jean Julo met en avant trois processus dans la construction de la représentation que l'élève se fait d'un problème. Ces processus ne se font pas dans un ordre chronologique, mais simultanément, et c'est ensemble qu'ils forment la représentation.

1. Processus d'interprétation et de sélection des données

Jean Julo prend, pour illustrer ce processus, l'exemple du problème « des deux jarres »¹⁰. En proposant à des élèves et à des étudiants un exercice équivalent, mais qui traite d'eau et d'huile ou de billes vertes et bleues, il met en évidence le fait suivant : l'interprétation des données de l'énoncé dépend de nos connaissances extérieures au domaine mathématique. Ici, ces connaissances sont la notion de concentration, celle de miscibilité et le fait que, quand on remplit un verre de billes, le nombre de billes qu'on peut mettre dépend de leur disposition. Cet exercice peut se résoudre sans s'occuper des matières que l'on transvase d'une jarre à l'autre (c'est-à-dire en sélectionnant moins d'information que ne le fait l'individu moyen) et en les interprétant de manière purement « idéale »¹¹.

En classe de sixième, l'erreur classique en matière de sélection est de vouloir utiliser tous les nombres de l'énoncé. Cette erreur peut prendre des formes différentes. Dans l'exercice « Benoît et Clotilde vont à la boulangerie », déjà vu plus haut, les élèves de la 6^{ème} 2 veulent utiliser le nombre 500 à la première question : ici, l'énoncé ne contient pas de

¹⁰ « On prend un verre de vin dans une jarre de vin ; on le met dans une jarre d'eau. Puis on prend un verre du mélange obtenu et on le met dans la jarre de vin. Y'a-t-il plus de vin dans la jarre d'eau ou plus d'eau dans la jarre de vin ? »

¹¹ On prend une quantité « x » d'une quantité « a », etc....

véritable piège. On peut plutôt penser que ce sont les élèves les plus rapides qui créent ce piège, en proposant tous des réponses contenant 500 : tous les autres élèves tendent à suivre l'exemple.

Dans un autre exercice¹², un tiers des élèves a utilisé le « deux » de « on coupe une planche en deux » dans les calculs. Cette erreur relève à la fois de :

- l'interprétation (« quand on coupe une planche en deux » devient « quand on coupe une planche en deux morceaux » puis, et c'est là qu'est l'erreur, « quand on coupe une planche en deux morceaux égaux ») ;
- la sélection (les élèves utilisent tous les nombres fournis par l'énoncé).

On peut noter que plusieurs mémoires de Professeurs d'Ecole font état du phénomène contraire : les écoliers hésitent à se servir de nombres écrits en toutes lettres¹³. De ces constatations paradoxales, on peut seulement tirer cet enseignement : la position des élèves par rapport à la typographie (nombres écrits en toutes lettres ou en chiffres) n'est pas figée. Le fait de placer des nombres écrits en toutes lettres dans un énoncé perturbe le schéma habituel de l'élève.

2. Processus de structuration

Si le contenu de la représentation se contentait de transformer et de s'enrichir progressivement au cours de la résolution, le fonctionnement des processus sous-jacents serait relativement simple à analyser et à influencer. Or les éléments de la représentation ne sont pas disjoints, séparés, mais structurés. Les principales questions concernent la restructuration qui s'opère au fur et à mesure, c'est-à-dire :

- la façon dont l'élève relie entre eux les éléments qu'il a sélectionnés dans l'énoncé ;
- les connaissances mathématiques dont il pense avoir besoin ;
- les connaissances extérieures au champ mathématique auquel il fait appel.

Jean Julo prend ici l'exemple de l'exercice des «neuf points de Maïer»¹⁴. Il faut, pour résoudre cet exercice, faire abstraction des connaissances antérieures, qui poussent à considérer que les segments ont leurs extrémités sur le dessin d'origine.

¹² « On coupe en deux une planche au tiers de sa longueur. Un des morceaux obtenus mesure 2,4 mètres. Combien mesurait la planche d'origine ? Examiner tous les cas possibles », extrait du Dimathème de 6^{ème}, donné à l'occasion d'un devoir à la maison.

¹³ Voir le mémoire de PE 2 de Florence Labouche, académie de Montpellier, centre de Nîmes, 1999 – 2000.

¹⁴ Neuf points sont disposés en trois lignes et forment un carré. « Joindre tous les points en traçant 4 segments, et sans lever le crayon »

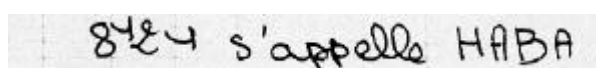
On retrouve le même type de problème de structuration en 6^{ème} dans le chapitre sur la multiplication. En principe, le cas particulier de la multiplication par une puissance de 10 (technique du déplacement de la virgule) a déjà été vu¹⁵. Mais dès que l'on commence à étudier la multiplication, la technique de déplacement des virgules est très rarement appliquée. Les élèves posent les multiplications par 10, adoptant ainsi une technique plus lourde et plus susceptible d'erreurs. Laura, par exemple, pose, dans un devoir à la maison, la multiplication suivante :

$$\begin{array}{r}
 2,4 \\
 \times 10 \\
 \hline
 00 \\
 24 \\
 \hline
 2,4
 \end{array}$$

Un automatisme a été créé par la nouvelle leçon : Laura relie l'opération à effectuer à la dernière leçon étudiée.

On pourrait même dire que le fait de donner à calculer des multiplications par des puissances de 10 dans la séquence « Multiplication » constitue une rupture du contrat didactique, puisque ce que l'on attend des élèves (le déplacement de la virgule) ne figure pas dans la leçon en cours d'apprentissage.

Un autre exemple fait cette fois-ci intervenir un champ extérieur aux mathématiques. On demande à Kévin de poser la division de 8121 par 38 et donner le nom qu'on donne au nombre 8121 (la réponse attendue est « dividende »). La réponse de Kévin, elle, fait appel à une cryptographie simple :



8121 s'appelle HABA.

3. Processus d'opérationnalisation

Le processus d'opérationnalisation est celui qui permet un passage à l'action, qu'il s'agisse d'une action effective ou d'une action mentale. Il est évident qu'une représentation peut être plus ou moins opérationnelle, c'est-à-dire rendre plus ou moins aisée l'élaboration d'une procédure ou d'une stratégie : certains exercices se prêtent plus facilement à une mise en équation, à une résolution graphique ; un schéma peut constituer en soi-même une opérationnalisation efficace.

¹⁵ Lors de la séquence sur les nombres décimaux, c'est-à-dire avant la multiplication dans le cas général

Il est cependant important de distinguer opérationnalisation et modélisation de l'énoncé. La modélisation (schématisation, mise en équation, dessin à main levée dans le cas d'un exercice de géométrie, ...) permet de rendre la représentation plus opérationnelle (citons en exemple le tableau comme modélisation des problèmes de proportionnalité). Elle permet également une simplification et elle renforce la structuration. Elle n'est pourtant pas équivalente à une opérationnalisation.

La modélisation est souvent entendue comme une traduction du français vers le langage mathématique. On peut cependant se demander (et Jean Julo y répond par l'affirmative) si cette traduction ne demande pas de dominer la question posée, et ne succède donc pas à une structuration. Jean Julo revient sur le cas de la proportionnalité, en étudiant les réactions des élèves face à des exercices de type ERREUR¹⁶ ; il note que la proportionnalité est le premier outil de modélisation enseigné en mathématiques. La question est de savoir comment procéder pour que la notion soit acquise comme outil. Une solution consiste à passer par l'utilisation du tableau de proportionnalité.

Seule une minorité d'élèves a recours spontanément à cet outil. L'indication « commence par faire un tableau » peut sembler importante, mais l'expérience montre que, même si l'élève réalise un tableau correct, il ne sait pas forcément l'utiliser. Plus précisément, l'élève qui, naturellement, ne pense pas à faire un tableau, ne s'en servira pas ou s'en servira mal pour résoudre l'exercice. La modélisation, dans ce cas-là, reste partielle et ne conduit pas à l'opérationnalisation.

Le processus de modélisation ne peut se mettre en place que si la représentation est en cours de structuration. L'outil (le tableau de proportionnalité dans cet exemple) n'est pas la base de la représentation du problème. En revanche, une fois le problème compris, la mémoire retient l'outil comme point de départ : c'est pour cela que les professeurs tiennent tant à voir des tableaux de proportionnalité.

Un exemple illustre bien la confusion que peut faire le professeur entre modélisation et schématisation. En devoir à la maison, les élèves avaient à faire l'exercice suivant :

Exercice n° 3

La scène se passe dans un magasin qui vend des CD, des livres et des cassettes vidéos.

Vincent achète un CD et un livre. Il dépense 29,80 €

Richard achète le même CD et une cassette vidéo. Il dépense 45,20 €

Michael achète la même cassette vidéo que Richard et le même livre que Vincent. Il dépense 35 €.

¹⁶ Par exemple : on possède une recette pour 12 personnes ; on veut la réaliser pour 3 personnes. On propose une adaptation de la recette, mais elle contient une erreur. L'élève doit la trouver.

1. *Quelle opération simple permet de connaître le prix de deux CD, deux cassettes vidéo et deux livres réunis ? (un schéma illustrant le problème peut aider à répondre à la question).*
2. *Quel est alors le prix d'un CD, d'une cassette vidéo et d'un livre réunis ?*
3. *Trouver le prix de chaque article séparément.*

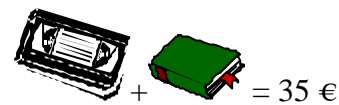
Le schéma attendu était :



$$2 \text{ CDs} + 2 \text{ livres} = 29,80 \text{ €}$$



$$2 \text{ CDs} + 2 \text{ cassettes} = 45,20 \text{ €}$$



$$2 \text{ cassettes} + 2 \text{ livres} = 35 \text{ €}$$

L'opération la plus simple à effectuer, pour résoudre le problème, consiste en effet à :

- additionner les trois « équations » contenues implicitement dans l'énoncé ;
- diviser par 2 les deux termes de l'équation obtenue ;

On a alors le prix de l'ensemble des trois articles, et on en déduit facilement le prix de chacun des articles.

Or aucun des élèves n'a pensé à cette schématisation, ce qui n'a pas empêché certains de résoudre l'exercice. On peut penser que si cette schématisation paraît utile au professeur et pas aux élèves, c'est parce qu'elle se rapproche, dans sa forme, d'une mise en système d'équation. De toute manière, elle ne paraît ni naturelle ni utile aux élèves : lors de la correction, une élève écrit cette schématisation au tableau, mais elle n'est pas sûre d'elle et efface à plusieurs reprises ce qu'elle vient d'écrire. Quand je lui fournis des pistes pour continuer dans cette voie (du type « si tu additionnes les trois nombres qui sont à droite dans les égalités, tu obtiens le prix de quoi ? »), l'élève ne voit pas du tout comment utiliser le schéma.

Deux conclusions s'imposent donc :

- cet exercice, adapté d'un problème du petit manuel d'Hatier 6^{ème}, demande aux élèves une résolution de type « équation » qui n'est pas de leur niveau ;
- il n'est pas toujours utile de vouloir imposer une schématisation aux élèves pour simplifier la résolution : au contraire, la tâche ainsi ajoutée peut dérouter des élèves, peut en arrêter d'autres (puisque ici, la schématisation constitue la première question du problème) et qu'enfin elle n'est pas nécessaire à la résolution.

Pour se mettre effectivement au travail à la lecture de l'énoncé, l'élève doit donc, dans un premier temps, interpréter l'énoncé en terme de tâche à effectuer, puis se construire rapidement une représentation de celle-ci. De plus, il faut que cette représentation soit opérationnelle.

III. QUEL RÔLE A LE PROFESSEUR ?

Dans Du contrat social, en 1762, Jean-Jacques Rousseau explique sa vision des rapports sociaux. Pour lui, chaque être humain, dans chaque situation, conclut un contrat avec les personnes, les institutions ou les objets de domination qui l'entourent. Pour assurer sa sécurité, il renonce à une part de sa liberté (part qu'il place donc dans les mains du législateur). Pour assouvir sa vengeance, par exemple, le citoyen va expliquer son cas à la Justice et s'en remettre à sa décision : il conclut par ce biais un contrat avec elle. Il pourrait, s'il le voulait, se faire justice lui-même, mais alors c'est son existence même qui sera en danger, car la société voudra l'isoler, voire le supprimer, si l'option est offerte.

La classe n'échappe pas, bien sûr, à « l'empire du contrat » : pour assurer sa sécurité (ce qui passe par l'obtention de bonnes notes, l'absence de colle, de bonnes appréciations de la part de ses professeurs), l'élève abdique une partie de sa liberté (faire des avions en papier, chanter en cours de français, raconter des blagues en cours de musique, ...). Quelle est cette part de liberté ? Dans quelles mains doit-elle être remise ?

Il est évident que le comportement de l'élève doit être imprégné de la relation d'autorité qui se noue entre les élèves et le professeur : ce dernier s'est vu déléguer par l'institution scolaire un pouvoir de coercition et c'est ce pouvoir qui impose une autorité à l'élève. Le contrat n'a pas besoin, sur ce point, d'être explicité. En revanche, en ce qui concerne la partie didactique, les élèves doivent garder une certaine autonomie, se construire un *topos*. Cette part de liberté va leur permettre d'être acteur de leur formation, de découvrir et pas seulement d'écrire sous la dictée ou de faire sous le guidage serré du professeur. Le concept de contrat didactique intervient ici avec la théorie des situations, pour désigner « l'implication commune des élèves et du professeur dans une situation didactique »¹⁷. A chaque indication qu'il donne, à chaque interdiction qu'il prononce, le professeur tend à modifier le contrat didactique. Or celui-ci doit être le plus clair possible, le plus transparent, afin que les élèves ne se posent pas la question « Qu'est-ce que le professeur attend de moi ? », mais cette autre question : « Comment parvenir à répondre à la question de l'énoncé ? ». Si l'élève renonce à cette liberté de travail que le professeur lui concède, il progressera moins.

C'est la raison pour laquelle le professeur doit mener la prise en main de l'énoncé pour que chaque élève puisse se mettre au travail en se demandant : « Qu'est-ce que l'énoncé me

demande de faire ? Comment résoudre cette énigme que l'on me propose ? » et non pas « Que vient de dire le professeur ? ». Le discours de l'enseignant doit permettre aux élèves de mobiliser leurs connaissances afin de les mettre au service de la résolution de l'exercice.

IV. QUELLE AIDE A LA COMPREHENSION DE L'ENONCE EST-IL SOUHAITABLE D'APPORTER AUX ELEVES ?

A. Aide ou apprentissage ?

Selon Jean Julo, il faut différencier aide et apprentissage : l'aide est immédiate, son but est à court terme ; l'apprentissage est à long terme, il doit permettre aux élèves en difficulté de sortir du cercle vicieux de la non-compréhension et du non-travail mathématique¹⁸. Un des buts de l'apprentissage à la compréhension de l'énoncé peut être la formation de « schémas de problèmes », c'est-à-dire de connaissances liées aux situations particulières que les élèves ont rencontrées auparavant.

Aide et apprentissage, dans ce domaine, ne sont pas pour autant complètement dissociés. Dans le cadre de ce mémoire, par exemple, une expérimentation s'intéresse à l'aide à apporter aux élèves ; en même temps, si elle est couronnée de succès, elle constitue également un apprentissage pour les élèves en difficulté.

Dans les aides expérimentées par Jean Julo, on peut citer :

- l'ajout de tâches annexes (souligner, faire un tableau, répondre à une question non contenue dans l'énoncé d'origine...) : cette démarche peut se révéler lourde ; elle n'est pas forcément efficace (Jean Julo constate en effet que des élèves résolvent le problème sans faire les tâches ajoutées, et que d'autres font les tâches mais pas le problème) ;
- l'énoncé incomplet, que l'élève doit compléter lui-même avec des nombres donnés à part ;

¹⁷ « Les situations didactiques, en mathématiques », Alain Mercier, Sciences de l'Education (INRP).

¹⁸ Quand l'élève ne comprend pas un énoncé, il n'a pas la possibilité de montrer sa connaissance des objets étudiés ; en utilisant moins ses notions, il a moins de chances de pouvoir sans servir un jour en tant qu'outil.

- des présentations peu classiques : une phrase explicite le but, puis d'autres précisent le contrat (sous forme de remarque par exemple) ; ainsi l'élève a plus de chances de comprendre l'objectif de l'exercice ;
- l'aide informatique : par un menu d'aides contextualisées, l'élève choisit lui-même l'aide qu'il souhaite recevoir.

Dans tous les cas, l'aide doit se soumettre à ses deux principes : pluralité et diversité. En effet, pendant que l'élève est en train de structurer sa représentation, une logique de l'aide n'est pas nécessaire. Ces quelques pistes générales serviront de base aux expérimentations menées.

B. Vers l'expérimentation

1. Typologie des tâches et des aides à apporter

Pour décider des expériences à mettre en place dans le cadre de ce mémoire, reprenons la typologie des énoncés, typologie que nous avons expliquée plus haut et qui s'appuie sur ce que le professeur attend des élèves. A chacune des attentes de l'enseignant correspond un type d'aide qu'il peut mettre en place :

- les élèves doivent utiliser une méthode : le guidage du travail des élèves doit alors être de moins en moins marqué au fur et à mesure qu'on s'avance dans la séquence. Par exemple, commencer par inscrire les principales étapes de la résolution au tableau, puis les rappeler à l'oral, préciser enfin qu'il existe une méthode. Ce principe a été mis en œuvre en classe de Terminale ES (stage de pratique accompagnée) lors de la leçon sur les statistiques. Cette méthode a le défaut de créer, dans l'imaginaire des élèves, un stéréotype d'exercice : la réflexion passe au second plan¹⁹. Elle est cependant adaptée à ce chapitre en particulier, qui donne lieu, lors du baccalauréat, à des exercices très semblables dans leur construction ;
- les élèves doivent surmonter une difficulté technique (une opération difficile, une construction géométrique qui demande de la précision, un cas particulier) : dans ce cas-là, il ne semble pas qu'une aide générale soit nécessaire. En général, une partie

¹⁹ Dans le cas des statistiques, les élèves commencent par entrer dans leur calculatrice le tableau de valeurs qu'on leur donne, appuient sur la touche « traitement » et recopient les valeurs affichées. La plupart des élèves en difficulté se contentent (sur les conseils du professeur) d'un savoir minimal : l'identification des expressions fournies par la calculatrice (Σx , par exemple) aux nombres demandés dans l'énoncé (Σx^2).

de la classe a les moyens de surmonter la difficulté. L'autre partie n'a pas forcément de difficultés à se mettre au travail : c'est la progression du travail des élèves qui doit être surveillée, et non la compréhension de l'énoncé. Il est toutefois nécessaire d'amener les élèves à remarquer la difficulté ;

- les élèves doivent imaginer un enchaînement d'opérations : c'est le cas habituel des problèmes par rapport aux exercices (un des critères pour différencier ces deux types de travail peut être le nombre d'opérations à effectuer pour répondre à une question). Dans ce cas, les objectifs didactique et pédagogique semblent s'opposer : pour mettre la classe au travail, il est parfois utile d'indiquer (ou plutôt d'y réfléchir avec les élèves) comment démarrer. Le problème perd alors une partie de son intérêt.

2. Les axes de travail

Dans la suite, on considèrera que l'aide à apporter est fixée lors de la préparation du cours par le professeur. Certes celui-ci ne peut pas prévoir toutes les questions que vont se poser et que vont poser les élèves. Il ne peut imaginer non plus les difficultés d'interprétation qui vont ralentir le travail des élèves. Mais les difficultés liées au contexte sémantique (présence d'un mot complexe, grammaire inhabituelle, etc.) et les difficultés techniques (sélection des données, choix du dividende et du diviseur s'il y a un quotient à calculer, etc.) peuvent être, dans une large mesure, anticipées en amont de la séance.

On va par conséquent s'intéresser ici à la manière et au moment d'apporter cette aide.

Les hypothèses de départ sont simples :

- l'aide doit venir autant que possible d'un ou plusieurs élèves et être formalisée au tableau par le professeur ;
- elle doit être mesurée : ni trop ni trop peu, afin de préserver une partie difficulté du problème, telle qu'elle a été conçue par ses rédacteurs ;
- elle doit se faire le plus tôt possible dans le déroulement de l'exercice ou du problème afin de ne pas « tuer » son intérêt : les élèves, une fois mis au travail, doivent continuer individuellement, sans se reposer systématiquement sur le professeur.

La mesure du succès ou de l'échec d'une expérience se fera à partir de deux critères :

- le niveau et la catégorie du bruit ambiant : le but est que tous les élèves se mettent au travail, y compris les moins motivés par le cours. Le niveau sonore doit donc

être celui d'une classe où certains élèves discutent de la tâche à effectuer par groupe de deux ;

- l'avancée des élèves dans la tâche : quand arrive le moment de la correction ou d'une aide intermédiaire, il faut que tous les élèves de niveau « moyen » soient arrivés au même stade.

V. LES EXPERIMENTATIONS

A. *Une aide constante pour un exercice difficile*

1. Présentation de la séance

Le cadre est celui d'une séance de remédiation à laquelle participe six élèves (Julie, Sandra, Virginie, Luc, Nicolas, Emilie) ; ces six élèves éprouvent des difficultés d'origine différente (manque de travail, précipitation constante qui nuit à la qualité du travail, manque d'intérêt pour les mathématiques ou lenteur). Une fiche de trois exercices leur est distribuée. On s'occupera ici du premier de ces exercices.

Ils étaient 400 000 à passer le casting de Loft Story 2. 6 filles et 5 garçons seulement sur tous ces candidats seront sélectionnés. Compléter la phrase suivante : « Chacun a une chance sur d'être choisi »²⁰.

A partir de cet énoncé d'apparence simple, on peut relever deux difficultés d'ordre différent :

- une information superflue (6 filles et 5 garçons, alors que le problème traite d'évidence indifféremment les deux sexes)²¹ ;
- un passage délicat entre une formule de la vie courante (avoir une chance sur...) et son équivalent en langage mathématique : une fraction.
- un sous-entendu acceptable pour un professeur de mathématiques mais plus difficilement pour un élève de sixième : celui de l'équiprobabilité : on considère qu'on divise le groupe de candidats en 11 sous-groupes, et que chaque sous-groupe admet un qualifié ;

²⁰ La réponse est 36 363.

²¹ Dans la suite, et si la question s'était posée (elle ne le sera pas), on aurait considéré qu'il y avait autant de candidats masculins que féminins.

- un statut différent pour chaque fraction : $\frac{11}{400000}$ exprime un rapport, alors que $\frac{1}{36363}$ représente un opérateur de probabilité.

Le principe, pour cet exercice très difficile²², est de ne pas laisser les élèves travailler seuls (ils ne le pourraient pas) et de mener toute la résolution ensemble. C'est pour cette raison qu'il a été proposé lors d'une séance de remédiation : les élèves ne vont pas avoir grand-chose à écrire, une seule opération à poser, l'essentiel va se trouver dans la construction de la représentation. Le problème disciplinaire serait donc un obstacle à la résolution de l'exercice en classe entière.

On a donc fixé la variable « comment apporter l'aide » : c'est le professeur qui va chercher à aiguiller la réflexion des élèves. La variable observée, c'est celle du moment où l'aide est apportée : quand peut-on laisser les élèves suivre leur raisonnement ? On pourrait le formuler ainsi : « Quand peut-on les lâcher ? ».

2. Déroulement de la séance

Première phase : le professeur propose aux élèves de livrer leur première pensée.

Les élèves ne semblent pas penser que cet exercice est spécialement facile, mais ils sont mis en confiance par la proposition du professeur : ils peuvent penser qu'ils ont une chance de tomber sur la bonne réponse. Sont proposées comme solutions : « 400 000 – 11 » ; « 400 000 × 6 ÷ 5 » ; « 5 » ; « 6 ÷ 5 ». Certaines propositions peuvent être écartées rapidement : 5 et 6 ÷ 5 ne sont pas convenables, car tous les élèves sentent intuitivement que le nombre recherché est beaucoup plus grand. Pour les autres réponses, aucune justification n'est demandée : il vaut mieux éviter que les élèves s'enferment dans leur idée première. Celle-ci n'a été demandée que pour « désacraliser » l'exercice.

Deuxième phase : repérer les données inutiles.

Le professeur attire l'attention sur la deuxième proposition, celle qui est crédible mais qui fait intervenir 6 et 5.

« *Le professeur* : que pouvez-vous dire des filles et des garçons ?

Julie : Les filles euh ... les filles ont plus de chances que les garçons.

Le professeur : comment as-tu trouvé cela ?

Julie : parce qu'elles seront 6 et les garçons seront moins.

²² Plus difficile encore que je ne l'avais imaginé en le préparant.

Le professeur : oui, pour Loft Story, c'est plus facile d'être une fille que d'être un garçon. Mais que pensez-vous que l'énoncé dit des filles et des garçons ?

Emilie : on ne peut pas savoir.

Le professeur : on ne peut pas savoir quoi ?

Emilie : on ne peut pas savoir la différence des chances des filles et des chances des garçons.

Le professeur : pourquoi ?

Sandra : parce qu'on ne sait pas ce qu'il y a dans les candidats.

Le professeur : c'est ça. La question est posée pour un individu quelconque, on ne s'occupe pas de savoir si c'est une fille ou un garçon. Et alors, que pensez-vous de cette solution qui a été proposée ?

Pas de réponse.

Le professeur : est-ce que vous croyez que dans le calcul il va y avoir 6 et 5 ?

Nicolas : oui, il y aura 6 + 5.

Le professeur : oui. Dans le calcul il y aura 6 + 5, c'est-à-dire 11, mais il n'y aura pas 6 ÷ 5 ou 5 ÷ 6. Il y aura le nombre total de sélectionnés. »

Troisième phase : quel opérateur utiliser ?

Cette phase, selon le schéma de Jean Julo, correspond à la phase de structuration. Les élèves commencent à comprendre ce qu'on leur demande, et notamment le fait que l'on s'intéresse à un individu asexué. Ils ont *a priori* compris le but de l'exercice (la réfutation des propositions « 5 » et « 6 ÷ 5 » montre que les élèves se font une idée assez juste du type de réponse à apporter). Toutefois, cette représentation qui se forme n'est absolument pas opérationnelle, comme on va le voir clairement ci-dessous. Les élèves doivent encore comprendre ce qu'on attend d'eux en terme de mathématiques.

Le professeur : à votre avis, à quelle leçon cet exercice se rapporte-t-il ?

Emilie : les fractions.

Le professeur : et pourquoi les fractions ?

Emilie : parce que c'est la leçon qu'on fait.

Le professeur : certes. Mais certains mots de l'énoncé peuvent vous faire trouver ça aussi. [...] Des petits mots.

Luc : « sur » ?

Le professeur : tout à fait. Est-ce qu'il n'y a pas une fraction qui est presque dans l'énoncé ?

Virginie : (après quelques tentatives auto-réfutées) onze quatre cent millièmes ?

Le professeur : oui. Que représente-t-elle, cette fraction ?

Julie : le nombre de gens qui seront pris sur le nombre de gens qui veulent y aller.

Quatrième phase : opérationnalisation.

La première fraction (onze quatre cent millièmes) est écrite au tableau. En calculant l'écriture décimale de cette fraction, on obtiendrait le nombre recherché, mais les élèves, on l'imagine, ont peu de chances de le réaliser. Personne ne propose de mettre cette fraction sous son écriture décimale.

Le professeur (et il est vraiment le seul) cherche à traduire l'autre partie de la consigne en fraction, s'appuyant sur la présence du mot « sur ». Mais le numérateur (le « 1 » de « une chance sur... ») met longtemps à venir, et pour le dénominateur...

Surtout, aucun des six élèves n'a proposé d'écrire l'égalité de deux fractions. Celle-ci leur paraît à admettre, puisque le professeur l'a marquée au tableau, mais trois difficultés se présentent :

- le fait que l'on sorte du domaine de l'égalité numérique (celle qui annonce un résultat) pour entrer dans l'égalité algébrique (qui traduit l'équivalence de deux expressions), semble déstabiliser les élèves ;
- le passage de la langue française au langage mathématique est également difficile.
- il s'accompagne de plus d'une des premières tentatives d'algébrisation que les élèves rencontrent. L'inconnue n'est pas caractérisée ici par une lettre (le problème est déjà suffisamment complexe pour que l'on n'y ajoute pas une difficulté de sémantique mathématique) mais le blanc de « une chance sur ... » remplit le même rôle qu'un « x » ;
- enfin, on cherche à écrire l'égalité de deux fractions au statut différent (voir plus haut).

Le professeur cherche à faire lire la première fraction « onze sur quatre cent mille », puis à faire l'analogie entre « onze sur quatre cent mille » et « une chance sur ». Au bout de cinq minutes à poursuivre dans cette voie, Luc propose la réponse, mais il ne convainc personne ; d'ailleurs il ne s'est pas convaincu lui-même.

Une fois la solution trouvée, les élèves sont cependant plus positifs : si 11 personnes sur quatre cent mille sont sélectionnées, c'est la même chose que si une seule personne est sélectionnée sur 36 363.

L'objectif pédagogique est atteint. En mobilisant les élèves sur un problème largement hors de leur portée s'ils ne sont pas aidés, ceux-ci sont motivés. Le fait que le problème se

rapporte à Loft Story, phénomène sociétal important, n'a quasiment pas joué dans leur attitude. La participation intensive de chacun des élèves a permis de conserver leur attention.

D'un point de vue didactique, le résultat est mitigé : l'opérationnalisation du problème est le fait quasi exclusif du professeur : l'exercice est beaucoup trop difficile pour des élèves de 6^{ème}. Mais la résolution est celle des élèves. Le questionnement constant a maintenu les élèves en activité. Cependant, on sent bien qu'une telle démarche, en classe entière serait vouée à l'échec : vingt-six élèves ne pourraient pas participer de la même façon.

B. Une aide à un moment unique

1. Présentation de l'exercice

« En 1900, il y avait 2400 habitants dans un village.

En 1950, le village avait perdu 10 % de ses habitants par rapport à la population de 1900.

En 2000, la population a augmenté de 10 % par rapport à celle de l'année 1950.

Calculer le nombre d'habitants de ce village en 2000. »

Ce problème, qui ne semble pas présenter de difficultés majeures, est le dernier du chapitre consacré aux fractions, dans «le petit manuel d'Hatier» de 6^{ème}. On comprend aisément le piège : une baisse de 10 %, suivie d'une augmentation de 10 %, cela ressemble à une stagnation globale. La majorité des élèves risque de considérer les pourcentages comme une catégorie de nombres «à part», qu'on peut additionner et soustraire comme des nombres décimaux. Leur écriture n'est d'ailleurs pas très différente de celle des nombres décimaux²³. Notons cependant que l'énoncé place la baisse de 10 % avant l'augmentation. Si l'inverse avait été choisi, les élèves pourraient éventuellement penser et expliquer «10 % - 10% = 0 % ». Mais, ne connaissant pas encore l'existence de nombres négatifs, ils ne se peuvent pas se sentir autorisés à formuler «- 10 % + 10 % = 0 % ».

Deuxième obstacle à une juste représentation de l'énoncé : le processus de sélection peut laisser ici une place trop importante aux connaissances extérieures aux mathématiques. Dans la «vraie» vie, les pourcentages se lisent souvent de manière brute : «51 % des Français voteraient Jospin au 2nd tour» n'est quasiment jamais associé à un nombre d'électeurs ; «Cet article vous est proposé avec une réduction de 30 % » s'accompagne

quelquefois du prix soldé mais très rarement du prix de départ. Dans le premier cas, le pourcentage représente une proportion, un rapport, mais l'objet duquel on calcule cette proportion n'est pas explicité clairement : on peut noter qu'on parle le plus souvent de « Français » alors qu'il s'agit d'électeurs et d'électrices. Dans le deuxième cas, le pourcentage a un rôle d'opérateur (on calcule une fraction *de* quelque chose), mais l'opération est faite automatiquement : l'acheteur potentiel n'a pas à la réaliser, et c'est d'ailleurs pour cela que le pourcentage est utilisé dans les supermarchés.

Pour sortir de la méthode de résolution du type « $10\% - 10\% = 0\%$ », deux solutions sont *a priori* possibles :

- soit remarquer que les pourcentages sont des fractions, et qu'au niveau sixième les élèves ne savent pas additionner et soustraire des fractions²⁴ ;
- soit calculer le nombre intermédiaire d'habitants (celui de 1950), puis le nombre final et faire la « démonstration » par un contre-exemple.

Certes il existe une possibilité que les élèves se lancent machinalement dans le travail, sans prendre conscience de la possibilité de résolution rapide (mais erronée) qui s'offre à eux. Cependant, aucune étape intermédiaire ne leur est proposée. Il est donc très probable que le professeur devra lancer les élèves dans une démarche de démonstration. Cette aide doit se situer uniquement au début de l'exercice, puisque les calculs ne sont pas, ensuite, difficiles à effectuer. Ici, la variable en jeu est la manière d'apporter l'aide : le professeur va jouer sur la curiosité que peut provoquer la non-validité de la réponse que les élèves vont proposer spontanément.

2. Place dans la séquence

Ce problème a été proposé aux élèves pendant la première séance consacrée aux pourcentages. A ce moment-là, les élèves viennent juste de voir la méthode permettant de calculer le pourcentage d'un nombre, ils l'ont copiée dans leur cahier de cours et l'ont appliquée dans un premier exercice.

²³ Certains élèves confondent déjà trait de fraction et virgule. La fraction n'est donc pas parfaitement acquise en tant qu'objet de recherche, encore moins qu'outil. Le signe « % » est donc loin d'être maîtrisé, puisque la fraction sert d'outil à l'étude des pourcentages.

²⁴ Dans tous les ouvrages, les exercices proposent des additions et des soustractions simples de fractions ; cependant aucun n'a été demandé aux élèves.

3. Déroulement de la séance

La lecture se fait individuellement, dans le calme. Bastien, le premier à avoir fini la lecture, s'exclame : « Mais Monsieur, ça fait la même chose ! ». Peu à peu, les élèves, relevant la tête, semblent partager cette idée : ils ont l'air étonné que ce problème soit aussi facile à résoudre. Une fois que tous les élèves ont fini leur lecture, le professeur demande à Bastien de répéter et d'expliquer plus en détail ce qu'il a avancé : « quand on enlève 10 % et qu'on rajoute 10 %, on retombe sur le premier chiffre ». Murmures approbateurs. Un vote est organisé, qui tourne au plébiscite.

« Le professeur : Vous pensez tous qu'en l'an 2000, il y avait 2400 habitants dans ce village ? Eh bien moi je pense que non. »

Fabrice (un élève brillant), répète l'argument de Bastien.

« Si vous pensez vraiment cela, prouvez-le moi »

L'absence de proposition démontre que les élèves n'ont pas l'idée d'utiliser d'autres nombres de l'énoncé que 10 %. Il faudra une indication, quasiment un ordre, du professeur pour que les élèves calculent le nombre d'habitants en 1950 puis en 2000. L'objectif est à moitié atteint. Les élèves sont intrigués et veulent démontrer son tort au professeur. D'un point de vue pédagogique, la mise au travail est donc un succès. En revanche, d'un point de vue didactique, les élèves ne se sont pas appropriés la tâche ; ils n'ont pas su, et le professeur ne leur en n'a pas donné les moyens, dépasser l'aspect « évident » du problème.

C. Une reformulation de l'énoncé

1. Analyse de l'exercice

a) Analyse théorique

« Un champ rectangulaire a une largeur de 84 mètres. Calculer sa longueur sachant que celle-ci représente les $\frac{7}{6}$ de sa largeur »²⁵.

Cet exercice est une application du cours « multiplication d'un nombre par une fraction ». Cependant il diffère d'une application directe par son « habillage » (on cherche à résoudre une situation imaginaire). Or ici, le contexte de l'énoncé peut permettre à des élèves

²⁵ Petit manuel d'Hatier, 6^{ème}, page 48.

de se représenter le problème, mais peut aussi leur compliquer la tâche de compréhension de l'énoncé.

En effet, on parle de *champ rectangulaire* et non de rectangle, ce qui serait plus simple. La deuxième phrase est grammaticalement complexe, avec la présence d'une proposition circonstancielle de manière et de deux pronoms (*celle-ci* et *sa*).

De plus, la fraction agit ici comme un opérateur (ce qui est, à ce moment-là du programme de 6^{ème}, une nouveauté) et l'opérationnalisation nécessite une traduction du registre français vers le registre mathématique ($\frac{7}{6}$ de sa largeur, c'est $\frac{7}{6} \times$ largeur).

b) Expérimentation avec trois élèves

Avant de faire réaliser cet exercice aux élèves de ma classe, j'ai eu l'occasion de l'expérimenter en soutien sur des élèves d'une autre sixième. Ces élèves en difficulté ne savent pas comment aborder le problème. Ils n'ont pas l'idée de faire une figure (cette habitude de faire des figures à main levée pour mieux comprendre un problème est presque inexistante chez les élèves de 6^{ème})²⁶. Une brève discussion permet de réaliser que les élèves ne comprennent pas la seconde phrase : ils n'identifient la tâche (ils ne répondent pas, ou pas juste, à la question : « Que doit-on calculer ? »). En revanche, quand on leur demande d'identifier les données, ils n'hésitent pas : c'est « 84 mètres » : le statut du nombre écrit en chiffre permet à l'élève de le remarquer facilement. « Et qu'est-ce qui mesure 84 mètres ? » amène la réponse « la largeur ». Les élèves semblent réaliser alors que l'exercice ne concerne pas uniquement la multiplication d'un nombre par une fraction, mais aussi la géométrie. Une relecture attentive leur permet de comprendre qu'on leur demande le calcul de la longueur d'un rectangle. Puis l'opérationnalisation pose problème. Certes « Multiplication par une fraction » est inscrit au-dessus de l'exercice, mais que faut-il multiplier par la fraction²⁷ ? Une lecture de la leçon permet de voir qu'il s'agit en réalité d'une « Multiplication d'un nombre par une fraction ».

²⁶ On retrouve l'idée de Jean Julo selon laquelle une modélisation (dans ce cas une figure à main levée) ne peut être effectuée que si une amorce de représentation s'est réalisée dans l'esprit de l'élève. Et que simultanément, le professeur (qui a d'entrée une représentation précise de l'énoncé) considère la modélisation comme un outil de résolution.

²⁷ On peut s'étonner de l'hésitation des élèves, alors que le choix du facteur de la multiplication est passablement réduit : il n'y a que 84 qui puisse être utilisé.

2. Expérimentation en classe

a) Préparation de la séance

Au vu des difficultés éprouvées par les élèves de remédiation, une aide à la compréhension de l'énoncé s'impose.

Les élèves doivent reformuler l'énoncé, en le synthétisant : le but est de faire apparaître clairement les « données – nombres » (84 et $\frac{7}{6}$), les « données – mots » (rectangulaire, largeur et longueur) et la consigne (calculer la longueur) afin que la représentation des élèves ne soit pas brouillée par le contexte et par la grammaire utilisée. On exclut le recours à une figure à main levée, qui constituerait une tâche supplémentaire et pas forcément utile.

b) Déroulement

L'exercice succède au cours sur la multiplication d'un nombre par une fraction.

La lecture est faite à voix haute par deux élèves. Le professeur demande : « Si je vous demandais de souligner les données, qu'est-ce que vous souligneriez ? »²⁸. Les réponses sont les deux nombres de l'énoncé. « Et quels sont les mots importants dans l'énoncé ? » : « champ rectangulaire », « largeur de 84 mètres », « calculer sa longueur » et « représente les $\frac{7}{6}$ de sa largeur » sont proposées. Le professeur revient sur « champ rectangulaire », pour faire dire aux élèves que « rectangulaire » suffit. Il met ensuite en valeur « longueur » et « largeur ».

Le professeur demande ensuite à un élève « Comment pourrais-tu résumer l'énoncé ? ». La reformulation de l'élève est maladroite, mais il a compris l'essentiel, et le professeur peut dire, en donnant l'air de la répéter : « On cherche la longueur d'un rectangle, on connaît sa largeur et on sait autre chose. C'est quoi ? ». Un élève propose : « Elle représente les $\frac{7}{6}$ de sa largeur ». Après avoir fait préciser le « Elle », la classe passe à la résolution proprement dite de l'exercice.

²⁸ « Quelles sont les données ? » aurait été plus simple, mais la question posée renvoie à une tâche que certains élèves ont pris l'habitude de réaliser lors des interrogations écrites.

3. Conclusion

L'exercice proposé dans cette expérience est relativement simple. Une fois que l'énoncé est bien approprié (sous la forme d'une figure ou d'une tâche à effectuer), l'opérationnalisation est simple, puisque le cours vient d'être vu. Dans ce cas, la discussion a permis aux élèves de sélectionner les éléments adéquats de l'énoncé et de les structurer en terme de tâche.

VI. CONCLUSION

Travailler avec une classe difficile conduit sans doute à s'interroger davantage sur sa pratique ; en cela mon expérience de stagiaire aura été enrichissante. Essayer d'intéresser les élèves et surtout de les rendre actifs dans leur apprentissage doit être un but quotidien. Quand le professeur s'interroge sur la manière dont ses élèves vont appréhender un énoncé, il stimule son propre intérêt pour l'exercice, et les élèves le ressentent. Cette démarche est donc profitable aux deux parties.

Reste que le rôle de l'expérience professionnelle est important : il est difficile de tirer des conclusions générales d'expérimentations sur une seule classe. L'expérimentation la plus réussie, par exemple, est à mon sens la dernière, celle que j'avais eu l'occasion de préparer en situation, avec des élèves d'une autre classe. Même s'il n'existe certainement pas de recette miracle, l'habitude peut amener une meilleure connaissance des préjugés et des difficultés des élèves. De là, les démarches d'aide à la compréhension de l'énoncé s'affinent et s'améliorent.

Enfin, ce mémoire s'intitulait à l'origine « Lecture, représentation et schématisation d'un énoncé ». La dernière partie n'a été qu'effleurée dans ce mémoire, et souvent en des termes négatifs : la schématisation est souvent intuitive pour le professeur et absconse pour l'élève. Je reste cependant persuadé qu'il est nécessaire d'introduire relativement tôt une logique de la schématisation. Celle-ci peut en effet devenir, si elle est maîtrisée, un puissant outil de résolution.

ANNEXE 1 : DEVOIR A LA MAISON N° 7

Exercice n° 1

Dans l'énoncé suivant, souligne en rouge les informations importantes et en bleu les verbes qui t'indiquent ce qu'il faut faire. Détaille ensuite les étapes de la résolution de l'exercice. Enfin, réalise ces étapes.

« Jean, Sophie et Karine ont apporté des CD pour faire la fête. Jean a apporté trois CD de plus que Sophie et Karine en a apporté quatre fois plus que Jean. Sachant que Sophie a apporté 5 CD, calcule le nombre de CD disponibles pour la fête. »

Exercice n° 2

« Arthur a acheté 1,4 kg de viande à 14,50 euros le kilogramme, 750 g de fruits à 1,40 euro le kilogramme, deux pamplemousses, un journal à 0,60 euro et trois pains à 0,75 euro l'un. Il donne 30 euros à la caissière qui lui rend 5 euros. »

1. Combien Arthur a-t-il dépensé ?
2. Expliquer les étapes nécessaires pour arriver à calculer le prix d'un pamplemousse.
3. Réaliser ensuite ces étapes (il faut trouver qu'un pamplemousse coûte 40 centimes d'euro).

Exercice n° 3

« A Rochefort, les rues du centre-ville se coupent à angle droit. Léa habite rue Lesson et elle se rend à son collège situé rue Victor Hugo. Partant de chez elle, elle descend la rue Lesson, traverse la rue Duvivier, tourne à gauche dans la rue Audry de Puyravault, tourne à droite dans la rue Pierre Loti et, enfin, tourne à gauche dans la rue Victor Hugo. »

1. On veut faire un schéma des rues Lesson et Duvivier. Expliquer d'abord quels sont les éléments nécessaires à la réalisation et à la compréhension du schéma. Faire ensuite ce schéma.
2. Les rues Lesson et Duvivier sont-elles perpendiculaires ou parallèles ?
3. Compléter le schéma, en n'oubliant pas d'indiquer le nom des rues.
4. Dire si les rues Victor Hugo et Lesson sont parallèles ou perpendiculaires.
5. Dire si les rues Duvivier et Pierre Loti sont parallèles ou perpendiculaires.

Exercice n° 4

Pour cet exercice, on demande de détailler les calculs, en écrivant notamment les changements d'unités lorsqu'ils sont nécessaires.

Nom de l'animal	Taille	Saut en hauteur	Saut en hauteur en centimètres	Taille	Saut en longueur	Saut en longueur en mètres
Kangourou	1,60 m	2,5 fois sa taille		160 cm	8 fois sa taille	
Grenouille	8 cm	6 fois sa taille		8 cm	27 fois sa taille	
Puce	0,15 cm	300 fois sa taille		0,15 cm	200 fois sa taille	
Sauterelle	1,5 cm	35 fois sa taille		1,5 cm	100 fois sa taille	

Exercice n° 5

Dans l'énoncé suivant, souligne en rouge les informations importantes et en bleu la consigne, c'est-à-dire ce que l'on te demande. Puis explique en une phrase le type de réponse que l'on attend. Enfin, répond à la consigne.

« Sur une figure, on sait que :

- la droite (OG) est perpendiculaire à la droite (OC) ;
- le point E n'appartient pas à la droite (OC).

Que peut-on alors dire des droites (OE) et (GO) ? »

ANNEXE 2 SYNTHÈSE DES REPONSES AU DEVOIR A LA MAISON N° 7

		Exercice 1		Exercice 2		Exercice 3		Exercice 5		
	Rouge	Bleu	Etapes	Etapes	Eléments	Rouge	Bleu	Type		
Aguilar	Nombres + verbes	calcule + fête	Dans le calcul	4 étapes, après le calcul		Tirets	Question			
Bonnin	nombres	Calcule				Tirets	Question			
Cavelier	nombres	apporté (3 fois) + calcule	Dans le calcul	Dans le calcul		Tirets	Question			
Deloncle	Prénoms+données	Calcule	Dans le calcul	4 étapes	2 étapes	Tirets	Consigne + question	l'analyse de l'exercice		
Florès	Prénoms+données	Détaille + réalise + calcule	Dans le calcul	Dans le calcul		on siat que + tirets	Question			
Ibanez	Prénoms+données	Calcule		Dans le calcul	Données + traduction de traverser	Tirets	Question			
Luque	Quasiment tout	Sachant que Sophie a apporté 5 CD		2 étapes		Tirets	Question			
Mary	Prénoms+données	Apporté + calcule	Dans le calcul	Dans le calcul	Les directions + les rues sont perpendiculaires	Tirets	Question			
Meyer	Nombres+prénoms	apporté(4 fois)+calcule		4	compréhension du 6 schéma. J'imagine l'itinéraire	Tirets	Question			
Molina	Données	Apporté (2 fois) + calcule	Dans le calcul	Dans le calcul		Tirets	Question			
Munoz	Prénoms+données	apporté (3 fois) + calcule	3 étapes après le calcul	2 étapes de la fin, après le calcul		Tirets	Le reste			
Olivé	Quasiment tout	Calcule	Paraphrase du calcul	Dans le calcul	Données	2 lignes	2 lignes suivantes			
Olivier	Prénoms+données	Ont apporté + Sachant + calcule	Paraphrase de l'énoncé	3 étapes	Données	Enoncé	Consigne			
Percher	Prénoms+données	calcule	Dans le calcul	2 étapes	Du matériel	Tirets	Question			
Pierson			Dans le calcul	Dans le calcul						
Rerecich			Dans le calcul	Dans le calcul	Signification de "traverser"	Droite (2 fois) + (OE) + (GO)	le reste			
Ribas		apporté (2 fois) + sachant + calcule	3 étapes, calcul intégré	6 étapes, calcul intégré	angle droit, signification de "traverser"	Tirets	Question	"Une réponse avec deux solutions"		
Saëz	Quasiment tout	Apporté (4 fois) + calcule	Dans le calcul	Dans le calcul		Tirets	Question			
Samperiz	Nombres	Calcule	Dans le calcul	Dans le calcul		Tirets	Question	Faire le schéma montrant les différentes figures possibles		
Segalès	Quasiment tout	Calcule	Dans le calcul	Dans le calcul	Du matériel	Dur à lire	Dur à lire			