I.U.F.M.

Académie de Montpellier

Site de Montpellier

DE SAINT JULIEN Arnaud

Acquisition du concept d'équation pour un objet géométrique

Contexte du mémoire :

Mathématiques

Classe de Première S

Lycée Jean Moulin à Pézenas

Tuteur du mémoire : Brigitte Fournier

Assesseur : Thierry Murgier

Année universitaire : **2001-2002**

Résumé :

L'objectif de ce mémoire dans le cadre d'une classe de Première S, est d'essayer de faire prendre conscience aux élèves qu'un objet géométrique (courbes du plan, surfaces de l'espace…) peut être représenté de manière algébrique par une équation. Nous nous intéresserons donc au concept d'équation ainsi qu'aux règles de conversion entre les registres algébrique et graphique.

Abstract :

The aim of this dissertation is to try to show to pupils that a geometric object (curves , surfaces…) can be represented in an algebraic form by an equation. So we will be interested in the concept of equation and in the conversion rules between algebraic register and graphic register.

Mots-Clefs : équation, coordonnées, représentation graphique, fonction, changement de registre.

Table des matières

I Introduction et présentation de la problématique

Dans le cadre de l' année de stage IUFM, une classe de Première S m'a été confiée. J'ai décidé de commencer le cours par une séquence sur les fonctions. Très rapidement, j'ai constaté qu'il y avait beaucoup de flou, de confusion dans la tête des élèves et ce malgré le fait que l'étude des fonctions constituait déjà un enjeu essentiel de la classe de seconde. Des problèmes de vocabulaire et de notation sont apparus : les mots fonctions, représentation graphique, équations de droites, les expressions $f(x) = \ldots$, $y = f(x)$ sont souvent mal employés. En fait, leur signification n'est pas encore bien acquise ou assimilée. Mais ceci n'est pas très étonnant car on est au carrefour de plusieurs thèmes :

- algèbre : expression algébrique d'une fonction
- repérage : coordonnées, représentation graphique, équation de courbe
- géométrie : objet géométrique (droite, parabole, hyperbole…)

Un enjeu essentiel pour le professeur va donc être de mettre de l'ordre, « de défricher le terrain », pour que l'élève ait une vue plus globale des concepts.

Essentiellement, il s'agit de faire comprendre à l'élève qu'un même objet mathématique, une fonction peut être représenté dans des registres différents :

- le registre algébrique : l'expression algébrique de la fonction
- le registre graphique : la représentation graphique

Il faut de plus connaître les règles de correspondance ou de conversion entre les registres.

On constate d'ailleurs rapidement que les élèves ont beaucoup plus de difficultés à passer du registre graphique au registre algébrique. J'essaierai d'en expliquer les raisons par une étude théorique.

La problématique de ce mémoire aurait pu se cantonner à l'étude des registres de représentation dans le cadre exclusif des fonctions. Cette problématique pourrait d'ailleurs très bien se faire dans le cadre d'une classe de Seconde. Mais dans le programme de Première S, la notion d'équation est présente dans plusieurs parties du programme autres que les fonctions : équations de cercle, équations d'objets de l'espace (plans, sphères , cylindre, cône), sans oublier les problèmes de lieu géométrique traités de manière analytique.

Puisque la représentation graphique d'une fonction f peut aussi être vu comme une courbe d' équation $y = f(x)$, il m'a semblé important d'expliciter le concept d'équation pour un objet géométrique. Il s'agit de faire comprendre qu'à l'aide d'un repère un objet géométrique admet une représentation algébrique et réciproquement. On est toujours dans une problématique de conversion entre les registres algébriques et graphiques (ou géométriques).

L'avantage de cette problématique par rapport à la première est qu'elle est plus générale puisqu'elle englobe la première.

II **Analyse théorique de la problématique**

1) **Prise de conscience des différents registres de représentation**

Nous sommes partis de la simple constatation que le vocabulaire des élèves n'était pas bien maîtrisé. Il s'agit donc de clarifier le vocabulaire, de donner un peu plus de « dimension » aux concepts que l'on enseigne, ceci dans un but d'essayer de structurer la pensée de l'élève.

Une façon de procéder (c'est celle que nous choisirons) est de faire réaliser à l'élève qu'un objet mathématique peut être représenté dans divers registres. La notion de registre est celle utilisée par R.Duval [1].

Par exemple, l'objet fonction peut être représenté dans les registres numérique, algébrique ou graphique. Il ne faut donc pas confondre l'objet mathématique et la représentation qui en est faite. Duval rajoute « toute confusion entraîne à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage : soit par non rappel soit parce qu'elles restent des représentations "inertes" ne suggérant aucun traitement. La distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques. »

On comprend donc que la prise de conscience des différents registres de représentation est un enjeu essentiel.

a) **Comment faire ?**

Cette question posée naïvement n'a certainement pas une et une seule réponse. Avec ma petite expérience d'enseignement, je vais essayer de donner des éléments de réponse.

- Tout d'abord, et cela me semble très naturel le professeur doit bien faire comprendre aux élèves que l'expression algébrique et la représentation graphique sont deux représentations distinctes d'un même objet : une fonction. Mais ceci ne doit pas être un acte isolé, c'est durant toute l'année et dès que cela semble pertinent que l'on doit souligner la distinction entre les registres.

- Plus précisément, des exercices de changement de registre ou conversion comme dit Duval doivent permettre d'aider à cette structuration de la pensée.

Duval a d'ailleurs écrit: « en phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation ». A ce sujet, je vais faire une étude plus précise des problèmes de conversion dans la partie II 2.

- Enfin, je pense qu'il faudrait convaincre l'élève à l'aide d'exemples concrets de l'intérêt du concept de registre (on n'est pas obligé d'employer le mot registre utilisé par les didacticiens). Pour cela, je propose :
  - la résolution d'exercices nécessitant un changement de cadre
  - montrer aux élèves qu'on peut établir un dictionnaire permettant de traduire ou convertir dans les différents registres. (pour plus de détails voir plus loin)

b) <u>Intérêts</u>

- **psychologique** : il est toujours plus facile de manipuler ou faire des calculs avec des objets dont on a intégré la nature. De plus, si l'élève est sensibilisé aux problèmes de changement de cadre, il aura moins de difficultés à résoudre des exercices où implicitement, il faut changer de registre. Voici deux exemples d'exercice où l'on est obligé de jongler avec les registres.

<u>Intersection d'une courbe avec une famille de droites :</u>

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé. On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$.

On note *C* sa courbe représentative.

a) Quel est l'ensemble de définition de *f*, quelle est la nature géométrique de *C* ?

b) Donner les équations réduites des tangentes à *C* aux points d'abscisse 0 et 1. Que constatez-vous ?

c) Représenter *C* pour *x* dans [-4,4] ainsi que les deux tangentes du b).

d) La fonction *f* est-elle impaire ?

e) On considère la famille de droites D_m (paramétrée par le réel *m*) d'équation $y=-2x+m$.

Que pensez-vous des droites D_m ? Montrer que la droite D_0 ne coupe pas la courbe *C*.

f) Discuter selon les valeurs du réel *m*, le nombre de points d'intersection entre *C* et D_m .

<u>Courbes et tangentes</u>

Soit la fonction *f* définie sur P par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On note *P* sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

a) Déterminer les coordonnées des points suivants :

- *A*, point en lequel *P* admet une tangente horizontale ;
- *B*, point en lequel *P* admet une tangente de coefficient directeur –1 ;
- *C*, point en lequel *P* admet une tangente de coefficient directeur 1 .

b) Déterminer les équations réduites des tangentes aux points où *P* coupe l'axe des abscisses.

- **Mathématique** : Il me semble important pour la culture mathématique de l'élève de souligner l'importance des changements de registre.

Cela fait parti d'une démarche mathématique. Nous sommes confrontés à un problème avec certains objets. Il est souvent utile d'utiliser une autre représentation de l'objet, on change alors de cadre, on résoud le problème dans ce nouveau cadre et enfin on revient dans le cadre initial.

Je vais donner un exemple qui je trouve illustre bien le propos.

Je considère deux fonctions *f* et *g* à variable réelle que je suppose convexes.
Le but est de montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est encore convexe.
Mes hypothèses sont de type algébrique. (Je rappelle que *f* est convexe si
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$).
Si l'on veut montrer par l'algèbre que $\sup(f,g)$ est convexe, cela ne va pas être facile et encore moins drôle.
Une idée serait de changer de cadre. Peut-on représenter une fonction convexe dans le registre graphique ? La réponse est oui, une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. L'épigraphe de *f* noté $Epi(f)$ est la partie du plan qui se trouve au-dessus de la courbe de *f*. Maintenant, quelle est la représentation de $\sup(f,g)$ dans le registre graphique ? C'est par définition son épigraphe, mais par magie l'épigraphe de $\sup(f,g)$ est l'intersection de $Epi(f)$ et $Epi(g)$. De plus une intersection de convexes est convexe donc l'épigraphe de $\sup(f,g)$ est convexe, ce qui signifie en revenant dans le cadre initial que $\sup(f,g)$ est convexe. C'est joli et efficace. (C'est mon opinion…)

Il faut tout de même avoir conscience que la preuve sera d'autant plus facilitée que le système de représentation bien choisi et sophistiqué. Toute la difficulté est alors concentrée dans le problème du changement de registre, comment montrer qu'on ait en face de deux représentations d'un même objet ?
J'ai envie de citer deux "exemples" mathématiques célèbres où s'illustre le changement de cadre :

- la théorie de Galois qui établit un miroir entre les sous-groupes d'un groupe de Galois et les extensions intermédiaires d'une extension de corps.
- la conjecture de Shimura –Taniyama qui établit un pont entre deux mondes qui avaient l'air complètement disconnexes : les formes modulaires qui sont des objets, on va dire de nature plutôt algébrique : (ce sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan supérieur qui moralement sont stables (modulo un poids) sous l'action d'un groupe de symétrie (sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$)) et les courbes elliptiques qui sont des objets de nature géométrique (courbe projective plane lisse de degré 3), on parle de cubique.

- **Conception d'un dictionnaire**

Registre algébrique	**Registre graphique**
Expression algébrique f	Représentation graphique C_f
f paire	C_f symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
f impaire	C_f symétrique par rapport à l'origine
Fonction affine	Droite non verticale
Fonction du second degré	Parabole d'axe vertical
Fonction homographique	hyperbole
$f'(x_0)$	Coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$	C_f est asymptote en $+\infty$ à la droite d'équation $y = 2$

- Enfin, on peut penser que si l'élève a pris conscience des deux registres de représentation, il lui sera plus aisé de mieux comprendre la différence qu'il y a entre une lecture graphique (justification graphique) et une preuve par le calcul algébrique. Le graphique constitue un support visuel, il permet d'avoir de l'intuition et de lire des résultats mais il ne constitue pas une preuve algébrique.

2) Acquisition du concept d'équation

Les élèves ont rencontré le concept d'équation pour on objet géométrique dès la classe de Troisième avec les équations de droite. Au lycée avec les études de fonction, ils entendent aussi parler d'équation pour une parabole par exemple. Je pense qu'il ne voit pas trop la distinction avec l'expression de la fonction et ma foi, il est vrai qu'il est équivalent dans ce cas de connaître f ou d'avoir l'équation $y = f(x)$. Mais en classe de Première, les élèves vont rencontrer des équations d'objets géométriques diverses qui ne sont pas forcément des représentations graphiques de fonction : cercle, plan, sphère, cylindre, cône. Cette fois-ci le concept d'équation est incontournable.

a) Concept d'équation

Il s'agit de comprendre qu'un objet géométrique peut être appréhendé de manière algébrique. Pour cela, on munira le plan ou l'espace d'un repère cartésien. Nous avons alors la notion de coordonnées, en effet un point M (par exemple du plan) va alors être représenté par un couple de nombres appelés coordonnées et noté (x, y). Peut-on aussi donner une représentation algébrique à une droite, un cercle, …? On est amené à regarder quelles relations vérifient l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point M (x, y) choisi quelconque sur l'objet géométrique. Les conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par (x, y) pour que M soit sur l'objet géométrique constituent l'équation de l'objet géométrique.

b) Difficultés

- Présence implicite d'un repère. L'équation dépend du choix du repère.
- C'est une relation où sont utilisées des lettres. Quelle est la

signification de ces lettres ? On peut leur donner le statut de variable. Ce problème du statut de la lettre est flagrant lorsqu'on voit l'équation de la tangente. Dans les manuels, on a essentiellement ces deux notations :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Ce sont deux expressions avec 3 lettres, mais bien sur elles n'ont pas le même statut.

Pour la première expression, on se rend compte que certains élèves assimilent la lettre a au coefficient directeur de la tangente car depuis la Troisième, on leur dit qu'une équation de droite est de la forme $y = ax + b$, d'où la confusion.

J'ai choisi dans mon cours d'utiliser la seconde expression pour éviter le problème de la première et pensant qu'en choisissant la notation x_0, on pourrait mieux se rendre compte que x_0 désigne une abscisse. Mais j'ai été confronté à un problème supplémentaire, certains élèves confondent x_0 et x !

Peut-être, une troisième notation serait plus adaptée, par exemple :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On voit donc que la présence de lettres et surtout leur signification n'est pas un problème anodin pour l'acquisition du concept d'équation.

- Aussi, je pense qu'il est difficile pour un élève de réaliser qu'une équation de parabole , de cercle ou une équation de cône dépendent d'un même concept.
- Enfin, il y a encore un implicite dans le concept d'équation, c'est celui *d'espace ambiant*. En effet, que penser de l'équation $y = 2$. Et bien, dans le plan il s'agit d'une droite verticale et dans l'espace d'un plan. De même l'équation $x^2 + y^2 = 1$ désigne un cercle dans le plan et un cylindre dans l'espace. Si vous êtes intéressé à ce genre de problématique, vous pouvez consulter M. Maurel [3].

c) **Solutions**

- Il faut que l'élève voit un maximum d'équations de nature différentes :
  - courbes : représentation graphique, cercle, droite verticale
  - régions délimitées par des courbes
  - surfaces de l'espace

- Il faut faire des changements de repère pour que l'élève voit que l'équation est modifiée. Il pourra alors s'apercevoir qu'il y a des équations pourrait-on dire de la même famille :

- $ax + by + c = 0$	droite
- $y = f(x)$ où f est un trinôme	parabole
- $y = f(x)$ où f est une fonction homographique	hyperbole
- $x^2 + ax + y^2 + bx + c = 0$	cercle (ou vide)

- Montrer le lien avec les fonctions . Il pourra être intéressant de s'intéresser au cas du cercle par exemple qui est la réunion de deux morceaux de représentations graphiques de fonctions opposées.

3) <u>Règles de conversion entre les registres algébriques et graphiques</u>

Les exercices de changement de registre ma paraissent incontournables car ils aident vraiment à la prise de conscience des différents registres. On s'aperçoit très rapidement que les élèves ont plus de difficultés de passer du registre graphique à l'algébrique. Nous allons essayer d'expliquer cela, nous nous appuierons sur un article de Duval [2].

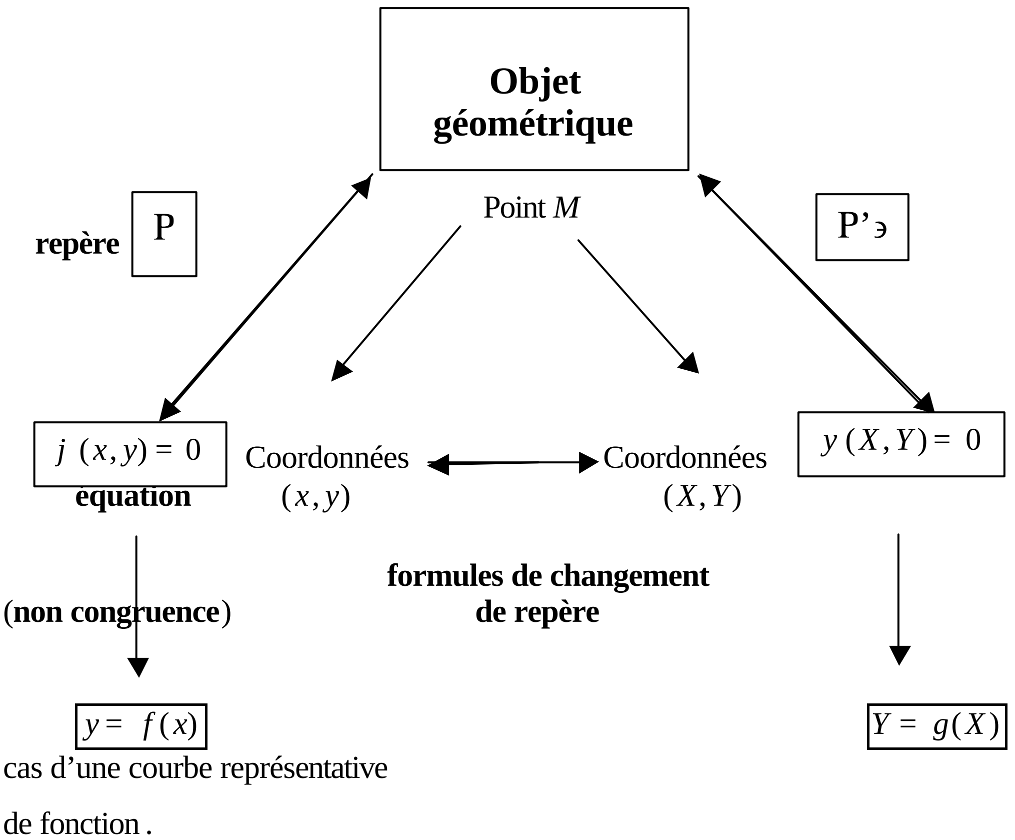
Le passage d'une équation à sa représentation graphique se fait par une construction point par point . On parle d'une démarche de *pointage*. Pour effectuer le passage inverse, l'approche point par point non seulement est inadéquate mais constitue un obstacle. Une démarche *d'interprétation globale* va être nécessaire.

Il va falloir discriminer les propriétés figurales de notre objet géométrique. Duval parle de variables visuelles. Nous distinguerons deux types de variables visuelles.

- Deux variables générales :
- implantation de la tâche (trait ou zone) (courbe ou surface)
- forme de la tâche (droite, courbe)
- Des variables particulières
  - <u>Droite</u> : $y = ax + b$
- sens d'inclinaison du tracé (signe du coefficient directeur)
- angles du tracé avec les axes (valeur du coefficient directeur)
- position du tracé par rapport à l'origine de l'axe vertical (ordonnée à l'origine)
  - <u>Parabole</u> : $y = ax^2 + bx + c$

- sens de la parabole (signe du coefficient de plus haut degré)
- inclinaison de la parabole (valeur du a)
- abscisse du sommet de la parabole (valeur de $-\dfrac{b}{2a}$)
- intersection de la parabole avec l’axe des abscisses (racines du polynôme)

Voici un schéma qui résume un peu la situation, on voit que toute courbe n’est pas une représentation graphique, à ce niveau on dit qu’il n’y a pas *congruence*.



III <u>Expérimentation</u>

La problématique m’est apparue assez tôt dans l’année. J’ai donc sensibilisé les élèves dès le départ à ce problème de changement de registre. Des exercices au cœur de la problématique ont été traités durant toute l’année. Toutefois j’ai réalisé deux séances phares en classe assez tard fin février. Ce sont celles que je propose d’étudier.

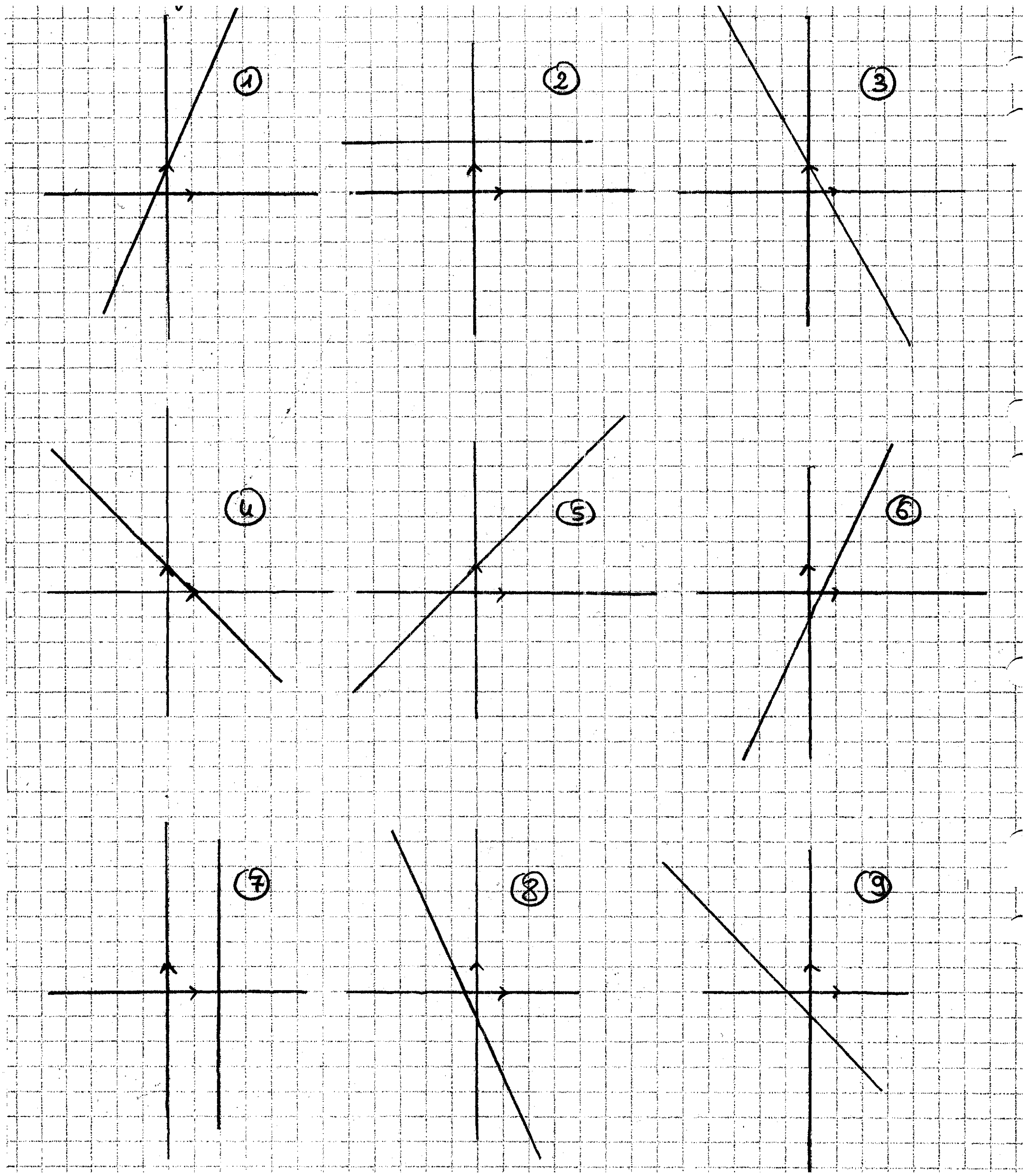
1) <u>Exercice sur les règles de conversion</u>

a) **Préparatifs**

Enoncés

- Exercice1

Il s'agit d'associer les courbes aux équations.

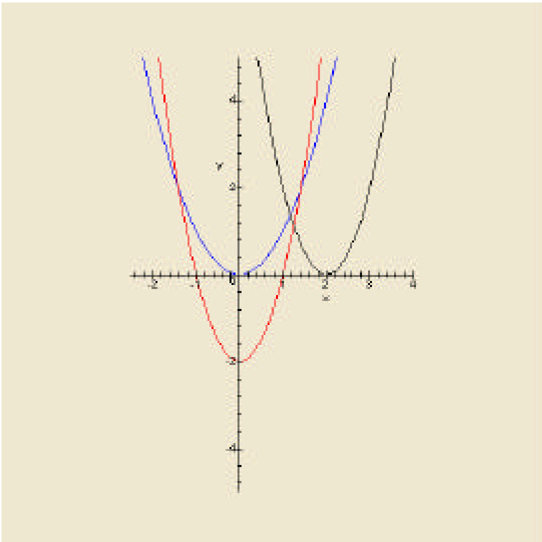


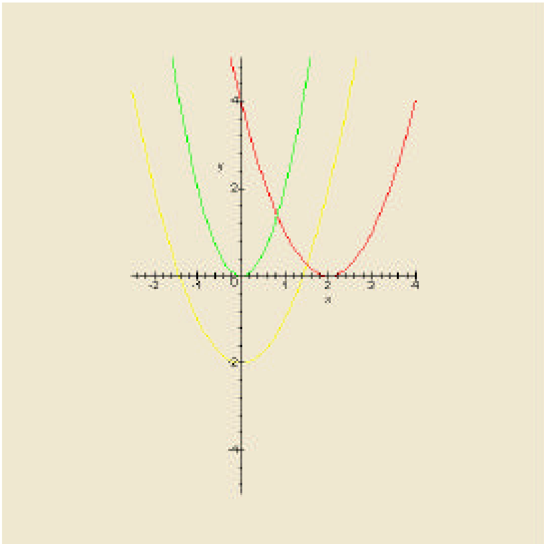
a) $y = -2x - 1$	d) $y = 2x - 1$	g) $y = -x - 1$

b) $x = 2$	e) $y = -2x + 1$	h) $y = 2x + 1$
c) $y = x + 1$	f) $y = 2$	i) $y = -x + 1$

- <u>Exercice 2</u>

Il s'agit d'associer les courbes aux équations.





<u>Equations</u> :

a) $y = (x-2)^2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = 2x^2 - 2$

e) $y = 2(x-2)^2$

f) $y = x^2$

<u>Objectif</u> : Voir si les élèves arrivent à discriminer des figures, c'est à dire à voir sur le graphique les propriétés figurales et à les traduire algébriquement. On se restreint dans cet exercice à des droites et des paraboles.

<u>Remarque</u> : Cet exercice s'inscrit bien dans le programme, puisqu'il permet l'étude de fonctions associées.

b) Analyse à priori

Les équations de droite sont connues par les élèves depuis la troisième, je pense donc que le premier exercice ne devrait pas poser de problème majeur.

L'exercice avec les paraboles est plus délicat, et devrait faire réfléchir les élèves.

c) Analyse à posteriori

Le premier exercice n'a pas posé de difficultés. Tous les élèves l'ont réussi en 5 ou 10 minutes.

Le second exercice a aussi été bien traité par tous les élèves.

Toutefois il faut souligner 2 choses :

- les élèves se sont entraidés
- certains ont utilisé la calculatrice…

De plus, cette fois-ci la différence de temps pour résoudre l'exercice entre les élèves a été plus importante.

2) Equation d'ensemble de points et régionnement

a) Préparatifs

Enoncé :

On munit le plan d'un repère orhonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit P la parabole d'équation $y = x^2 - 1$.

Soit D la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

a) On appelle Γ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient

$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leq y \leq x^2 - 1$.

Les points P et Q de coordonnées respectives $(-2,2)$ et $(1,0)$ appartiennent-ils à Γ ?

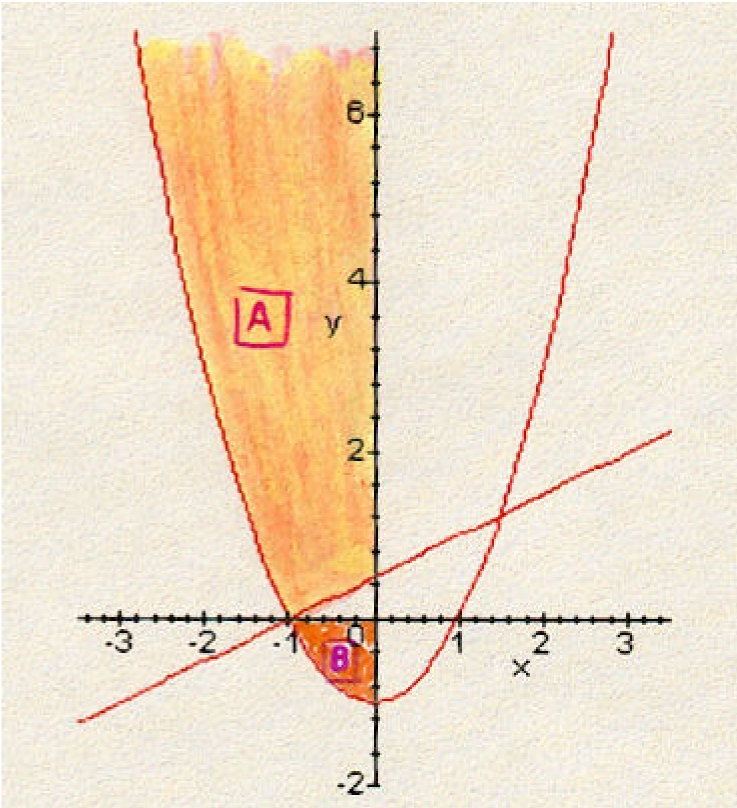
Hachurer cet ensemble Γ.

b) Hachurer l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x,y)

vérifient $(x^2 - 1 \leq y \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2})$ et $(x \geq 0, y \geq 0)$.

c) Quelles relations vérifient les coordonnées (x,y) d'un point se trouvant dans les zones A et B ?

Ces relations vérifiées par x et y constituent une équation de l'objet géométrique.



Objectifs :

- avoir plus d'aisance dans la lecture graphique, savoir traduire de manière algébrique des phrases du type « au-dessus de la parabole et en dessous de la droite »…
- faire rencontrer à l'élève des objets géométriques qu'il n'a pas l'habitude de manipuler (zones délimitées par des courbes) et montrer qu'on peut leur associer une équation.

b) Analyse à priori

L'exercice ne demande pas vraiment de connaissance, si ce n'est savoir ce qu'est une représentation graphique ; en revanche il demande de la réflexion et de la pratique.

Je pense que les élèves n'ont pas l'habitude de ce genre de question, ce qui devrait leur poser des problèmes.

Plongeons-nous plus précisément dans l'énoncé :

- On voit que l'ensemble G est délimité par deux courbes.
- au b), il y a deux conditions.
- au c) il s'agit de la conversion inverse.

Remarque : Il est vrai que ce type d'exercice n'est pas classique, mais je pense qu'il est intéressant au-delà du cadre du mémoire. En effet, c'est un exercice de régionnement du plan, cette notion sera utile par exemple en Terminale lorsqu'ils apprendront l'intégration.

c) Analyse à posteriori

Cet exercice a effectivement posé des problèmes.

Question a) :

La grande majorité des élèves ont su dire si les points étaient oui ou non dans l'ensemble.

La moitié des élèves sont restés « secs » pour hachurer l'ensemble G ; c'est à dire qu'ils ne savaient pas du tout comment s'y prendre.

Les autres avaient compris qu'une relation du type $y \geq \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ signifiait qu'on était au-dessus de la droite. A ce niveau, on peut remarquer que plusieurs élèves n'ont pas reconnu le dessous de la parabole.

Aussi, on peut souligner qu'un élève sur cinq a oublié de hachurer le «morceau de la partie à droite de la parabole ». (voir annexe)

Remarque : J'ai aidé les élèves qui avaient bloqué au départ en leur faisant hachurer d'abord des zones plus simples.

Question b) :

Cette question a été beaucoup mieux réussie. Les élèves arrivent mieux à voir la région $y \geq x^2 - 1$ que $y \leq x^2 - 1$.

La présence de la condition supplémentaire $x \geq 0, y \geq 0$ n'a pas posé de problème. Ils ont naturellement converti le « et » algébrique en « intersection » sur le graphique.

Question c) :

- Tous les élèves ont réussi pour la zone B.
- En revanche, la majorité des élèves se sont trompés pour l'équation de la zone A.

Il est vrai que c'était un peu plus délicat, ne serait-ce rien que pour un problème d'écriture.

On peut signaler plusieurs bonnes réponses rédigées de cette façon :

$x^2 - 1 \leq y \geq \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ et $x \leq 0, y \leq 0$.

3) <u>Changement de repère</u>

a) <u>Préparatifs</u>

Enoncé :

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C représente la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x-1}$. Au vu du graphique, on a envie de dire que C est une hyperbole de centre Ω où Ω est le point de coordonnées $(1,2)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit M un point du plan.

On note (x, y) ses coordonnées dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$. On rappelle qu'on a alors les relations $\begin{cases} Y = y-2 \\ X = x-1 \end{cases}$.

On considère la propriété (P) : « Le point M est un point de la courbe C ».

a) Comment exprimer cette propriété à l'aide de x et y ?
   Quelle est l'équation de C dans $(O,\vec{i},\vec{j})$?
b) Comment exprimer cette propriété (P) à l'aide de X et Y ?
   Quelle est l'équation de C dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$?
c) Quelle est l'expression de la fonction F représentée par C dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$?
d) Donnez une *morale* à cet exercice.

Objectif :

Montrer que la notion d'équation dépend du choix d'un repère.

Montrer de plus le lien entre équation et fonction dans le cas d'une courbe représentative de fonction.

Remarque : *J'ai donné cet exercice à faire à la maison.*

b) <u>Analyse à priori</u>

J'ai déjà fait des exercices sur les changements de repère.

Je pense qu'ils vont bien traiter pour la plupart cet exercice.

Je suis assez impatient de voir quelle morale (question d)) ils vont donner à l'exercice.

c) <u>Analyse à posteriori</u>

Remarque : Le travail ayant été fait à la maison, certains élèves ont recopié le travail des autres. L'expérimentation est donc faussée, je manque de copies représentatives. (Aussi par ce que je n'ai que vingt élèves.)

Constatation : Il y a eu beaucoup d'erreurs !

Question a) :

Bien traitée sauf pour une élève qui a écrit « l'équation de C est $f : x \mapsto \frac{2x-4}{x-1}$

Question b) :

Quelques élèves ont fait l'erreur suivante : « pour trouver l'équation de C dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$,

On remplace x, y par X, Y ce qui donne $Y = \frac{2X-4}{X-1}$ »

Les autres ont bien remplacé x, y par $Y+2, X+1$, mais en simplifiant l'expression se sont trompés. Ils ont écrit (et tous les autres car ils ont copié sur une même copie qui était fausse !!) « $Y+2 = \frac{2X-2}{X} = 0$ » et donc « $Y = -2$ ».

On peut penser qu'ils ont simplifié (à tort) la fraction par X. Cette erreur de type calculatoire n'a pas entraîné de critique sur le résultat trouvé !!

Les élèves ont donc répondu au c) que la fonction représentée était linéaire, donc graphiquement une droite mais cela ne les a pas interpellés.

Morale : Peu de réponses, ce qui l'on fait ont écrit des choses du genre « lorsque nous effectuons un changement de repère, nous effectuons aussi un changement de représentation ».

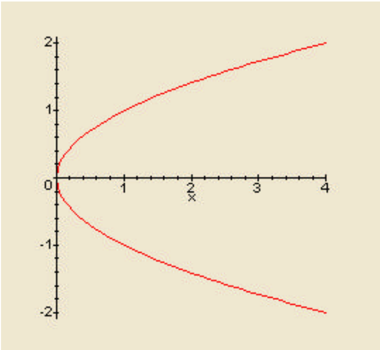
Conclusion : Je suis assez déçu car les élèves n'ont pas joué le jeu, c'est dommage car je pense que cet exercice est assez instructif.

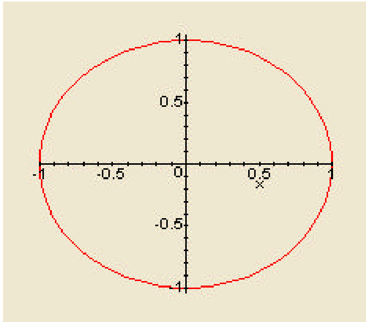
4) Courbes « non » représentatives de fonctions

a) Préparatifs

Enoncé :

a) Indiquer la nature géométrique des objets proposés puis représenter les sur une calculatrice. Vous indiquerez comment vous avez procédé.
b) Ces courbes sont-elles des courbes représentatives de fonction ?





<u>Objectif</u> :

Montrer que toute courbe n'est pas une représentation graphique.

b) <u>Analyse à priori</u>

Je pense que ce n'est pas facile surtout représenter le cercle.

c) <u>Analyse à posteriori</u>

- Tous les élèves ont bien reconnu une parabole et un cercle.
- Quelques-un ont bien vu pour la parabole qu'il y avait 2 morceaux, ont reconnu qu'il s'agissait des courbes de la fonction racine carrée et de son opposée.
- Pour le cercle 2 élèves ont trouvé qu'il s'agissait des courbes de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et de son opposée.
- 4 ou 5 élèves ont utilisé un menu « Coniques » sur leur calculatrice (CASIO) pour représenter les courbes. C'est assez remarquable, ils ont reconnu qu'une parabole et un cercle étaient des coniques (notion qui n'est pas au programme de Première S) et ont dû rentrer les paramètres de la conique. Je vous encourage à regarder dans les annexes ce qu'ont écrit certains élèves pour cette question.

IV Conclusion

L'ambition principale de ce mémoire est d'aider l'élève à mieux comprendre les objets qu'il manipule, ses différentes représentations, à structurer son esprit. C'est évidemment un travail à long terme. Après ces séances phares, je pense que les élèves ont été bien sensibilisés à la distinction entre registre graphique et algébrique. L'acquisition du concept d'équation est plus délicate. J'espère néanmoins que cela permettra aux élèves d'être moins surpris lorsqu'on va étudier les équations d'objet de l'espace.

En conclusion, je dirai que le mémoire a été pour moi un fil conducteur dans le choix des exercices, la problématique a constitué une sorte de transversale des programmes, ce qui a permis aux élèves d'être sensibilisés tout au long de l'année, j'espère que cela portera ses fruits.

<u>Références</u> :

[1] R.DUVAL, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5 (1993) (p 37-65) IREM de Strasbourg .

[2] R.DUVAL , *Graphiques et Equations : L'articulation de deux registres,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1 (1988) (p 235-253) IREM de Strasbourg .

[3] MARYSE MAUREL, *Derrière la droite l'hyperplan,* Repères n°42, IREM de Nice.