I.U.F.M.
Académie de Montpellier
Site de Montpellier

SALVAT Cédric

Apprendre à démontrer au collège

Comment ?

Contexte du mémoire :

Discipline concernée : Mathématiques
Classes concernées : 6^{ième}, 5^{ième} et 4^{ième}.
Etablissement : collège de Paulhan, Paulhan.

Tuteur du mémoire : Michel, ERADES.
Assesseur : Sylvie, PELLEQUER.

Année scolaire 2001/2002

Mots-clés : apprentissage, démonstration, raisonnement, déduction, déductogramme…

Résumé : Dans ce mémoire, j’ai essayé de repérer les difficultés que rencontrent les élèves lors de l’apprentissage de la démonstration afin de trouver des activités adaptées à leurs besoins.

Summarize : In this repport, I tried to reperate the

APPRECIATIONS DU JURY

Sommaire

Introduction

J’effectue mon stage en responsabilité au collège de Paulhan. J’ai en charge une classe de cinquième (quatre heures par semaine), une classe de sixième (une heure par semaine) et une classe de quatrième (une heure par semaine).

Dès les premières demandes de justification en classe de cinquième, j’ai eu droit à de nombreuses réponses du type : " on le voit sur la figure ". En classe de $4^{ième}$, j’ai été confronté : à des confusions entre argumentation et démonstration, au non-respect de la structure d’une démonstration, à des utilisations de résultats non-démontrés, à la non-distinction des différents pas d’une démonstration…

Suite à ces erreurs, je me suis posé deux questions principales. D’où proviennent ces erreurs ? Comment enseigner la démonstration pour éviter que survienne ce type d’erreur ?

Par ailleurs, j’ai constaté en discutant avec d’autres stagiaires et d’autres professeurs que la démonstration est un réel problème d’apprentissage pour les élèves mais aussi un problème d’enseignement pour le professeur. J’ai même réalisé en séance de didactique que même en sachant rédiger correctement une démonstration, il m’était difficile de répondre précisément à la question : " Qu’est ce qu’une démonstration pour vous ? ".

Pour ces raisons, j’ai eu envie d’approfondir ma réflexion sur ce sujet dans le cadre du mémoire pédagogique, et d’essayer d’apporter des solutions au problème d’enseignement de la démonstration au collège que j’ai rencontré dans chacune de mes classes.

Analyse des programmes

Programme de sixième :

Dans les objectifs généraux on peut lire que l'enseignement mathématique en classe de sixième : " doit notamment : développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive […] "

Les commentaires nous indiquent que " les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant par exemple sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme ".

" Ainsi, dès la sixième, l'enseignement des mathématiques développe les capacités de travail personnel de l'élève et son aptitude à chercher, à communiquer et à justifier ses affirmations. "

Programme du cycle central :

Dans la présentation on trouve :

" […] pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré "

" […] il s'agit, en poursuivant l'initiation très progressive au raisonnement déductif commencée en sixième, de passer de l'utilisation consciente d'une propriété mathématique au cours de l'étude d'une situation à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples. "

" Le programme du cycle central du collège a pour objectif de permettre : […] la connaissance de propriétés et relations métriques relatives à des configurations de base […], l'apprentissage progressif de la démonstration ; "

Programme de 5ème :

" Les diverses activités de géométrie habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettront progressivement de s'entraîner à des justifications au moyen de courtes séquences déductives […] tout en veillant à ne pas leur demander de prouver des propriétés perçues comme évidentes. "

Les commentaires du programme de 5e signalent par exemple que " la symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme permettent de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° " et que la caractérisation de la médiatrice " permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes ".

Programmes de quatrième :

Dans les programmes de 4ième, il est précisé que les enrichissements " doivent favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration ".

Programmes de troisième :

" ils seront le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer et de rédiger des démonstrations ".

Conclusion :

Tout d'abord, compte tenu de la place accordée à l'apprentissage de la démonstration, souvent associé raisonnement déductif, dans les programmes, il semble que ce soit un des objectifs-clés de l'enseignement des mathématiques au collège. Cet apprentissage tient une place importante dans chaque niveau.

Il est de plus, souligné dans les programmes, que cet apprentissage doit se faire de façon progressive et en continuité d'un niveau sur l'autre. On retrouve, en effet, cette progression dans les programmes avec une gradation croissante des termes suivant le niveau : on part de " courtes séquences déductives " et de " justifier ses affirmations " en sixième pour atteindre " élaborer et rédiger des démonstrations " en troisième.

Analyse théorique

Les difficultés que rencontrent les élèves sont nombreuses de nature très diverse. J'en ai pour ma part recensé quelques-unes.

➢ Qu'entend-t-on par démontrer ?

En séance de didactique, j'ai pris conscience qu'il m'était plus facile de rédiger une démonstration que d'en donner une définition.

Démonstration : un type de preuve particulier qui est de nature discursive, c'est-à-dire qui prend forme et statut dans un discours particulier, qui procède par enchaînement de raisons : le raisonnement.

Deux grands types de démonstrations : analyse, synthèse…

> *" La manière de démontrer est double : l'une se fait par **analyse** ou **résolution**, et l'autre par la **synthèse** ou **composition** "*
>
> DESCARTES

La **synthèse** part des causes ou raisons dont elle déduit les effets ou conséquences ; elle a donc la nécessité de l'ordre déductif des antécédents aux conséquents qui contraint l'esprit à accepter la conclusion comme vrai.

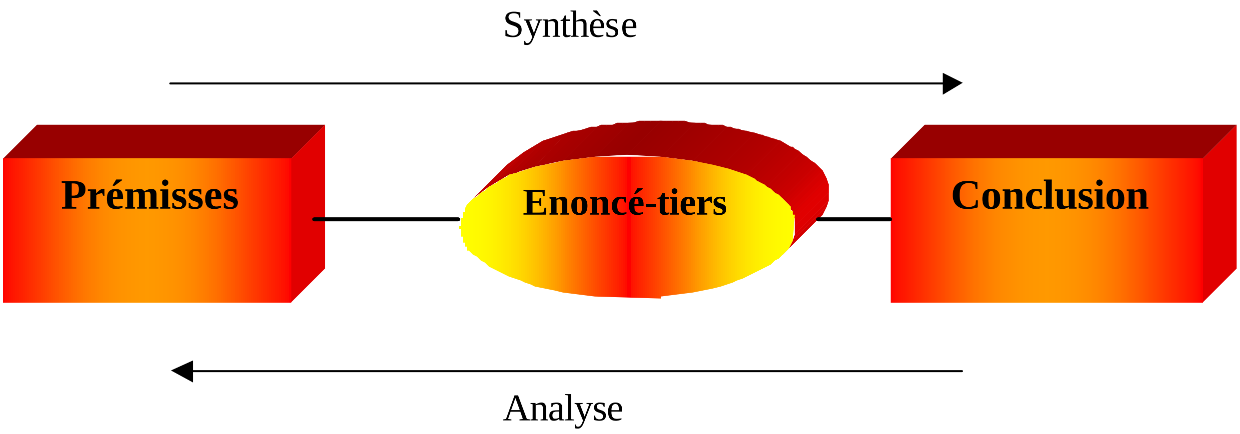
L'**analyse** est une méthode de découverte qui cherche les raisons en partant de la conclusion.

Il semble que les programmes privilégient la démonstration par synthèse. En effet, dans les programmes, démonstration et raisonnement déductif sont souvent associés. Or, la synthèse ne montre pas comment ont été trouvés les raisons ou causes qui sont le point de départ de la déduction. Elle n'est, en fait, qu'une méthode d'exposition : elle expose l'enchaînement logique de résultats qui ont été découverts par ailleurs.

Ceci pose un problème car une des grandes difficultés des élèves est justement de trouver ces raisons ou ces causes. Et en exposant une démonstration par synthèse, on masque le cheminement qui a permis d'accéder à ces raisons. Il est donc, à mon avis, important d'accorder une place à la démonstration par analyse qui "fait voir comment les effets dépendent des causes".

Une démonstration est un enchaînement de "petites démonstrations". On a une structure de base de la démonstration, appelé : pas de démonstration.

Schéma d'un pas de démonstration : (selon R.DUVAL)



Dans la rédaction d'une démonstration, il est important de faire ressortir les différents pas de démonstration et la structure ternaire de chacun de ces pas. Il est donc important pour l'élève de bien comprendre la structure de base d'une démonstration.

On retrouve dans le pas de démonstration les deux démarches possibles pour démontrer. Elles sont ici représenter par des flèches, ce qui fait ressortir leur opposition.

Fonction de la démonstration : éclairer, convaincre…

Une des fonctions de la démonstration est de convaincre, de se convaincre. Cette motivation amène naturellement une confusion pour l'élève entre démonstration et argumentation. D'autres similitudes entre argumentation et démonstration peuvent développer cette confusion. Mais :

> *"Il s'agit de ne pas confondre un raisonnement dont la validité peut être contrôlée, comme le raisonnement déductif, avec des raisonnements dont la validité ne peut être contrôlée comme une argumentation."*

R.DUVAL et M.A. EGRET

Le résultat d'une démonstration ne peut être mis en défaut. La véracité de ce résultat est établie de façon universelle par la démonstration. Alors que la conclusion d'une argumentation est subjective.

Pour que les élèves aient besoin de démontrer (de se convaincre, d'établir la vérité), il faudra donc créer le doute, mettre en défaut leurs intuitions.

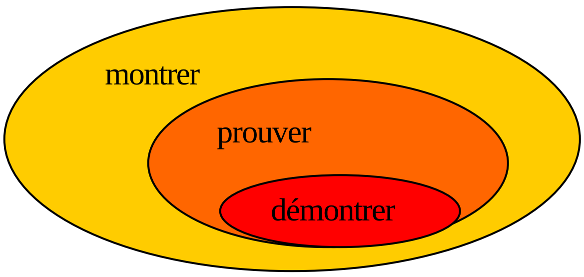
➢ Quelles sont les différences entre montrer, prouver et démontrer ?

Dans les livres, l'élève rencontre différentes consignes. On lui demande de montrer, de prouver, de justifier, d'expliquer, de démontrer… Qu'est-ce que le professeur doit exiger de l'élève à chacune de ces consignes ? Comment l'élève doit–il interpréter ces consignes ?

Toutes ces consignes n'ont pas la même signification. On peut tout d'abord faire le lien entre la gradation de ces consignes et la progression de l'apprentissage du raisonnement déductif tout au long du collège.

Il est, à mon avis, important d'établir un contrat clair avec les élèves à ce sujet afin que leurs réponses correspondent bien à notre attente.

Jacqueline Guichard représente la gradation de ces consignes par le diagramme suivant :



Montrer, c'est le terme le plus général. Il s'étend des opérations les plus simples, depuis la simple mise sous le regard (sens étymologique), jusqu'à la démonstration.

Prouver a un sens plus général que démontrer : une démonstration établit une preuve, mais toute preuve n'est pas de l'ordre de la démonstration.(par exemple : preuve expérimentale)

➢ Une nouvelle façon d'appréhender une figure : l'observation discursive

R. DUVAL a mis en évidence l'existence de quatre appréhensions possibles d'une figure. Je vais ici m'intéresser principalement à deux de ces appréhensions possibles.

La plus immédiate de ces appréhensions est **l'appréhension perceptive**. Cette appréhension des objets dessinés est automatique et permet d'identifier les formes. Elle correspond à ce que l'on voit au premier coup d'œil sur une figure, sans réflexion préalable. Les analyses qu'elle engendre, sont globales et se limitent à de simples constatations. Elle ne nécessite pas d'apprentissage mathématique pour fonctionner.
En opposition à cette appréhension, **l'interprétation discursive** d'une figure relève, elle, d'un apprentissage. Elle met en relation la figure avec un texte éclairant sur les propriétés de cette figure à prendre en considération. Cette interprétation est nécessaire à tout raisonnement déductif ou à toute démonstration basée sur une figure.

Au collège, le principal support à la démonstration est la figure géométrique. Le premier obstacle à l'apprentissage de la démonstration est donc, que l'observation de l'élève, 'à son entrée au collège, est simplement de nature perceptive ce qui entraîne une non-nécessité de justification. Il n'a aucun besoin de se convaincre. Mais, contrairement à ce que je pensais, il ne s'agit pas de remplacer ce type d'observation par une observation discursive. En effet, observer de façon perceptive une figure, nous permet de faire des conjectures à partir d'un dessin.
L'élève est soumis à un conflit cognitif. Jusqu'à présent lorsqu'il rencontrait une figure comme la figure1, on exigeait de sa part qu'il voit deux droites perpendiculaires. Dorénavant, seule une figure codée comme la figure 2 peut lui permettre d'affirmer que deux droites sont perpendiculaires.

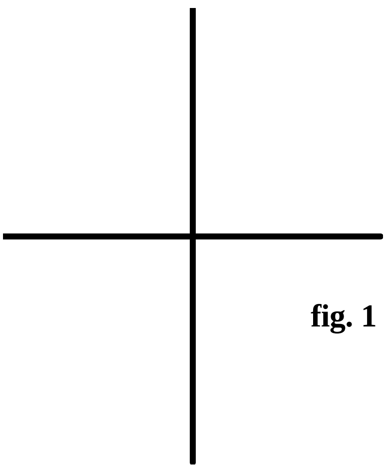


fig. 1

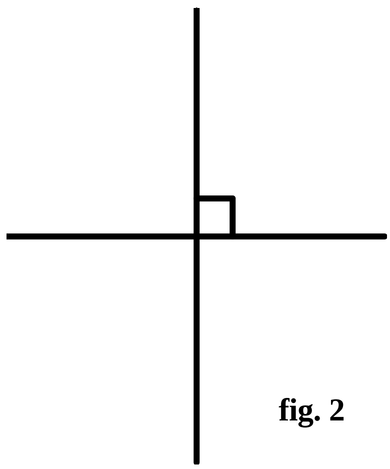


fig. 2

Le vocabulaire employé jouera un rôle important. Dans le cas de la figure 1, il faudra insister sur l'incertitude de la perpendicularité.

➢ <u>Les données, le codage : qu'est-ce qu'on sait ? Que doit-on démontrer ?</u>

Toute démonstration part " de ce que l'on sait ", des données, des hypothèses, des prémisses… selon le nom qu'on leur a données.
Ces prémisses peuvent être données sous différentes formes :

- Langage naturel (énoncé);
- codage.

D'après le groupe didactique de l'IREM de Montpellier, est considéré comme codage d'un dessin en géométrie, tout signe qui exprime une propriété de la figure, c'est-à-dire qui traduit une information donnée dans l'énoncé.
Dans les livres les élèves rencontrent aussi de nombreux exercices où les propriétés d'une figure sont simplement données par un codage.
On voit donc que, bien que le codage n'ait aucun statut dans les programmes, comme souligné par le groupe didactique de l'IREM de Montpellier, il tient une place relativement importante dans l'apprentissage du raisonnement déductif.
Le codage n'est pas seulement un moyen d'obtenir les prémisses d'une situation, il facilite aussi l'observation discursive d'une figure, il permet d'indiquer les propriétés de la figure tenues pour vraies. De cette façon, lorsqu'une figure est donnée en langue naturelle, le codage permet de traduire sur le dessin les informations fournies par l'énoncé. Dans ce nouveau rapport à la figure, seules les propriétés codées peuvent être considérées comme vraies.

Malgré l'absence de la notion de codage dans les programmes, le travail sur le codage aide l'élève à distinguer les propriétés d'une figure établies comme vraies de celles qui sont de simples conjectures. Ce travail est de plus indispensable par la présence dans tous les manuels scolaires d'exercices où les données sont transmises sous forme de codage.

Quelques pistes pour améliorer l'apprentissage de l'élève

➢ <u>Donner du sens, un intérêt à la démonstration : mise en défaut des intuitions de l'élève…</u>

Pour améliorer l'apprentissage de la démonstration, un point des plus important est à mon avis de répondre par des activités adaptées à des questions du type " A quoi ça sert ? ".

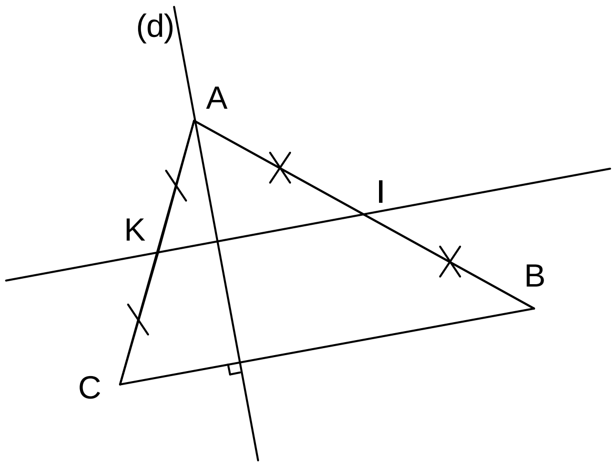
Je pense qu'une réponse adaptée est de proposer des activités qui mettent en défaut leurs intuitions, leurs perceptions. Il faut les faire douter de ce qu'ils voient, afin qu'ils aient besoin de se convaincre, d'utiliser des propriétés.

➢ <u>Utilisation du déductogramme : installer la déduction, structurer le raisonnement (prémisses, énoncé tiers, conclusion)</u>

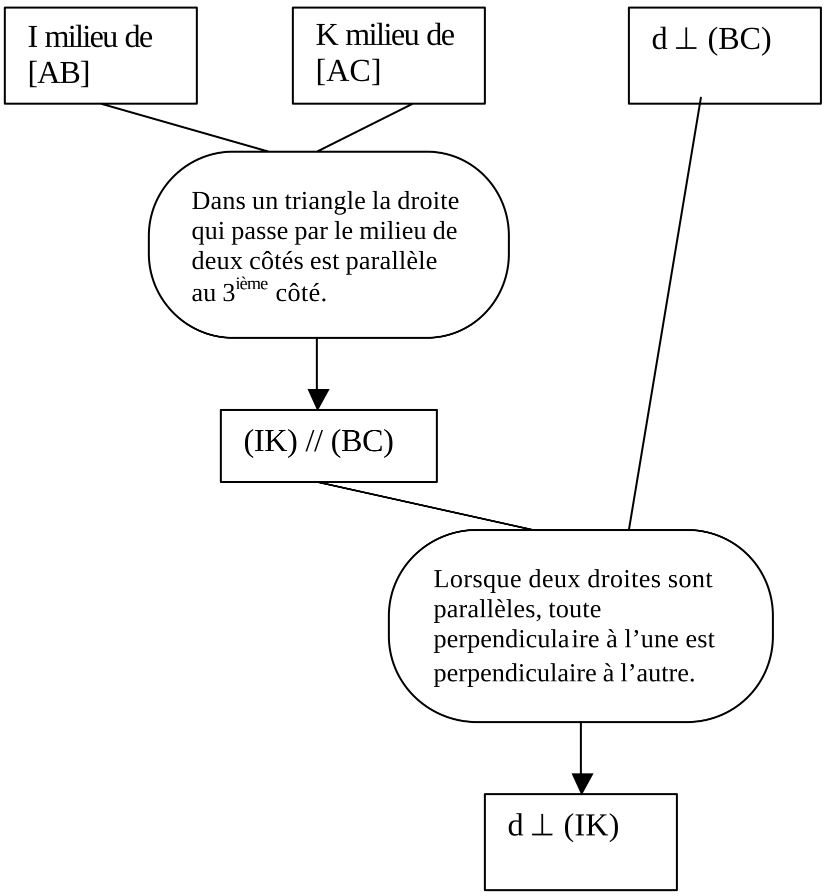
Un déductogramme se présente sous la forme d'un réseau :

Exemple :

Considérons la figure suivante.



Le déductogramme associé à la démonstration de (d) perpendiculaire à (IK) se présente comme suit :



Le déductogramme permet de visualiser l'organisation des différents pas d'une démonstration.

Un des inconvénients du déductogramme est que les conclusions intermédiaires étant représentées que par une seule assertion, cette assertion a le double statut de conclusion pour pas de démonstration et de prémisse pour le pas suivant.

Description des séances

1$^{\text{ère}}$ séance :

Voici un énoncé d'exercice :

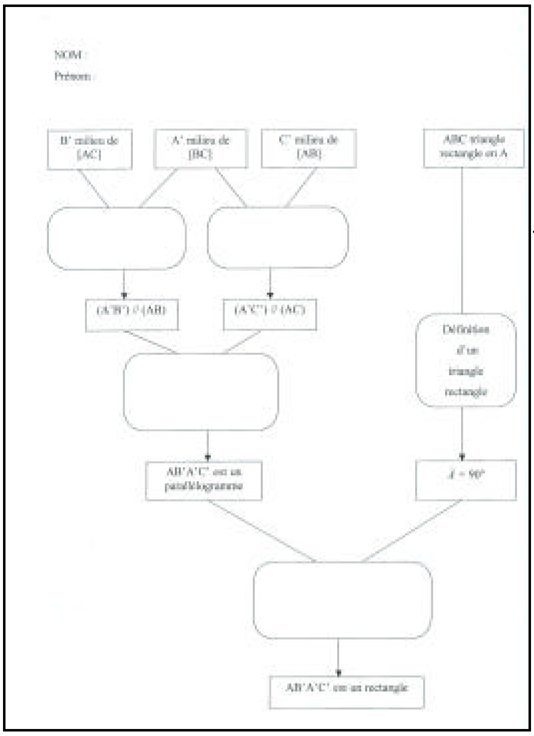
> ABC est un triangle rectangle en A.
> A' est le milieu de [BC], B' est le milieu de [AC] et C'est le milieu de [AB].
> Quelle est la nature de AB'A'C' ? Justifie ta réponse.

1. Quelles sont les données de cet énoncé ?

2. a. Fais une figure et code-la en faisant apparaître les données de l'énoncé.
b. Une réponse du type " AB'A'C' est un rectangle " est-elle satisfaisante par rapport au travail demandé ?

3. Une façon de justifier ta réponse est donnée sur la 2$^{\text{ième}}$ feuille :

a. Complète chaque cadre par la propriété qui convient.
b. Où sont placées les données de l'énoncé ? Où est placée la conclusion finale ?
c. Combien de flèche par t-il de chaque propriété ou définition utilisée ?
Y a-t-il des conclusions intermédiaires qui ne servent pas de données pour un pas de démonstration suivant ?
d. Sur le réseau précédent, visualise les différents pas de démonstration par le moyen de ton choix.



2$^{\text{ième}}$ feuille

Analyse à priori :

Niveau : classe de 4^{ième}.

Place :

Objectifs :

Fonction : introduire le déductogramme comme méthode de justification et comme support à la démonstration.

Scénario :

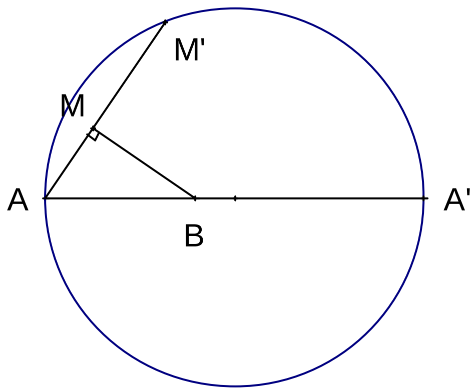
- Distribution des feuilles, consignes ;
- 25 min de recherche individuelle ;
- correction.

Analyse à posteriori :

Question	Réponse	Nombre d'élèves	Pourcentage
1	aucune	2	8,3%
	incomplète	4	16,7%
	juste	18	75%
2a	absence de codage	4	16,7%
	codage inadapté	7	29,1%
	codage incomplet	4	16,7%
	juste	9	37,5%
2b	fausse	2	8,3%
	juste	22	92,7%
3a	absence	5	20,8%
	fausse	6	25%
	incomplète	6	25%
	juste	7	29,2%
3d	absence	9	37,5%
	fausse	11	45,8%
	Juste	4	16,7

2^{ième} séance :

[AA’] est un diamètre du cercle C.



Pour répondre à la question " Démontre que (A’M’) est parallèle à (BM) ", fais le travail suivant.

Partie I :

1. Enoncez toutes les propriétés que vous connaissez pour démontrer que deux droites sont parallèles.
2. Parmis ces propriétés, laquelle vous paraît la mieux adaptée ici pour démontrer que (A’M’) et (BM) sont parallèles ? Expliquez votre choix ?
3. Avec cet outil, que vous reste-t-il à démontrer ?

Partie II :

1. Enoncez toutes les propriétés que vous connaissez pour démontrer que AA’M’ est un triangle rectangle en M’.
2. Parmis ces propriétés, laquelle vous paraît la mieux adaptée ici pour démontrer que AA’M’ est un triangle rectangle ? Expliquez votre choix ?

Partie III :

Rédigez maintenant votre réponse à la question à la question " Démontre que (A’M’) est parallèle à (BM) ".

Analyse à priori :

Niveau : Classe de 4^{ième}.

Place :

Objectifs : Le but de cet exercice est d'amener les élèves à décomposer le raisonnement qu'ils doivent suivre pour rédiger une démonstration. En effet qu'on rédige une démonstration par analyse ou par synthèse, la recherche des propriétés à utiliser se fait principalement par analyse, surtout lorsque le nombre de données est important.

Fonction :

Scénario :

- travail par groupe de quatre élèves,
- les différentes parties sont distribuées les unes après les autres :
  - partie I : environ 15 min
  - partie II : environ 15 min
  - partie III : environ 10 min
- Je circule entre les différents groupes en intervenant le moins possible.

Analyse à posteriori :

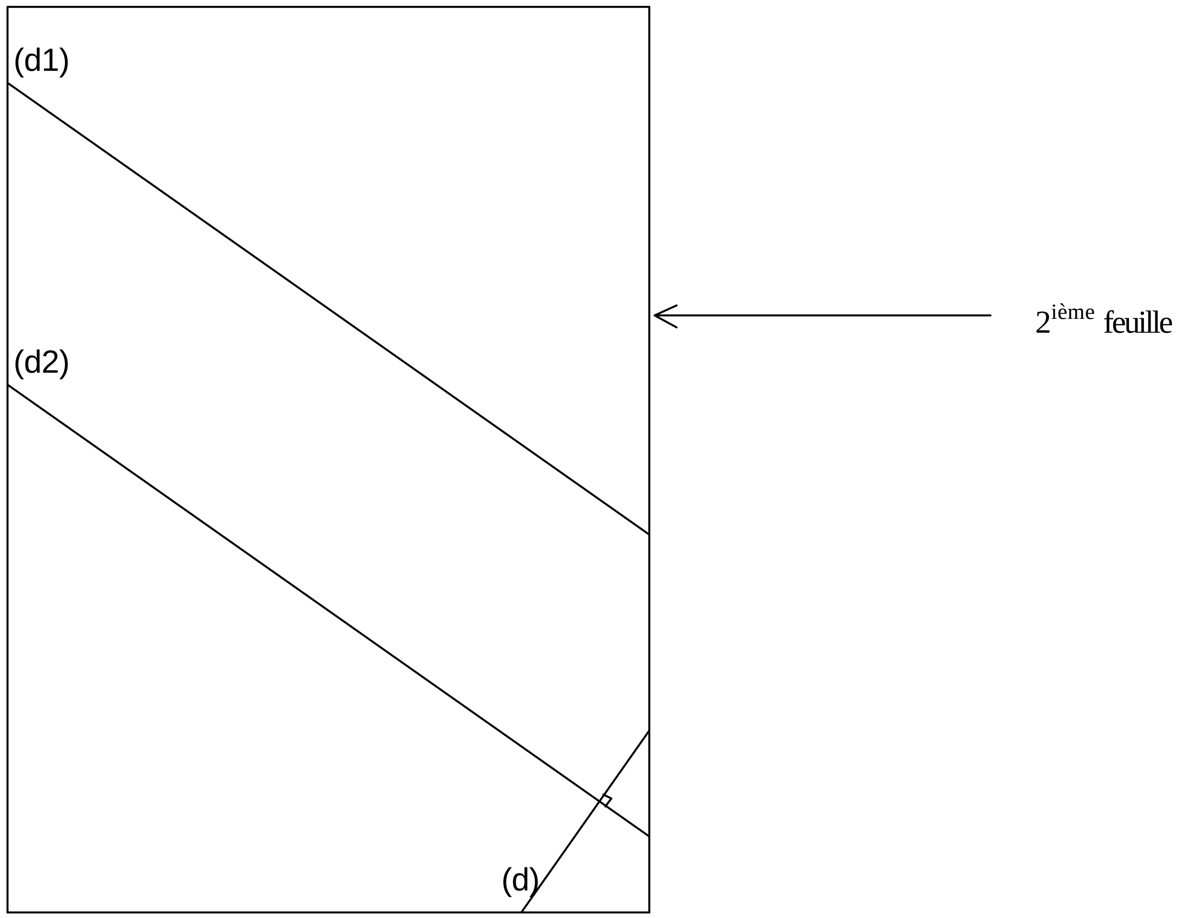
4 groupes sont arrivés à une démonstration valide.

1 groupe a utilisé un théorème faux.

1 groupe n'a pas réussi à synthétiser les résultats des parties I et II.

3ième séance :

Sur la feuille ci-jointe les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
Que peut-on dire des droites (d_1) et (d) ? Justifier votre réponse.



Analyse à priori :

Niveau : Classe de sixième.

Place :

Travail effectué avant cette activité :

- Notion de parallèles, de perpendiculaires et de sécantes ;
- institutionnalisation des trois propriétés sur les parallèles et les perpendiculaires.

Objectifs : Première utilisation d'une propriété pour justifier un résultat.

Fonction : forcer l'élève à observer de façon discursive une figure, rendre l'utilisation d'une propriété mathématique nécessaire pour connaître un résultat.
On bloque l'observation perceptive ainsi que la possibilité d'utiliser l'équerre avec les limites de la feuille.

Scénario :

- j'énonce les consignes
- Distribution des deux feuilles, vérification que la consignes : "justifier votre réponse " est bien enregistrée
- 10 min de temps de recherche individuelle
- relevé des feuilles
- débat, bilan et correction (entre 15 et 20 min)

Analyse à posteriori :

question	réponse	Nombre d'élèves	pourcentage
$(d_1) \perp (d_2)$	aucune	2	8%
	fausse	3	12%
	juste	20	80%
Justification	aucune	6	24%
	incorrecte	14	56%
	pertinente	5	20%

Dans un premier temps, j'ai été déçu par les résultats. Mais le débat lors de la correction fut très intéressant. Tout d'abord je me suis aperçu que de nombreux élèves qui avaient mal justifié n'étaient pas convaincus par leur explication. Et pour ceux qui persistent dans les justifications du type : "les droites (d1) et (d) sont perpendiculaires parce que si on continue les droites (d1) et (d) elles forment un angle droit. ", "On le voit sur la figure ", la situation offre des arguments de réponse.
De plus, après s'être mis d'accord sur la nécessité d'utiliser une propriété pour justifier dans ce cas, j'ai étendu le débat au cas où l'on voit l'intersection des deux droites.

Conclusion

Tout d'abord, la réalisation de ce mémoire m'a conforté dans l'idée qu'une réflexion sur l'apprentissage de la démonstration m'était nécessaire.

Par ailleurs, les problèmes d'hétérogénéité ont été amplifiés par les difficultés qu'ont les élèves avec les démonstrations. D'où la difficulté de proposer des activités adaptées à l'ensemble de la classe.

Bibliographie

- GUICHARD J. — STATUT ET FONCTIONS DE LA DEMONSTRATION EN MATHEMATIQUES : QUELQUES REPERES.
IREM de POITIERS, juin 1993.

- MASSOT A. et JAFFROT M. — QUELQUES OUTILS POUR L'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION.
REPERES-IREM n°12, juillet 1993.

- DUVAL R. et EGRET M.A. — INTRODUCTION A LA DEMONSTRATION ET APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT DEDUCTIF.
REPERES-IREM n°12, juillet 1993.

- DUVAL R. — LES DIFFERENTS FONCTIONNEMENTS D'UNE FIGURE DANS UNE DEMARCHE GEOMETRIQUE.
REPERES-IREM n°17, octobre 1994.

- ARSAC G. — INITIATION AU RAISONNEMENT DEDUCTIF AU COLLEGE.
IREM de Lyon.

- GROUPE DIDACTIQUE — LE CODAGE : QUAND, COMMENT, POURQUOI ?
IREM de MONTPELLIER.

ANNEXES